Matemática Universitária Nº 17, dezembro de 1994, 29-39

Raízes de Polinômios com Coeficientes Inteiros Limitados

Jairo da Silva Bochi

O resultado principal deste trabalho é o seguinte (teorema 17):

O fecho do conjunto constituído pelos números reais x tais que $p(x) = 0$ para algum polinômio p com coeficientes inteiros limitados entre -M e M é a união dos intervalos $[-(M+1), -(M+1)^{-1}]$ *e* $[(M+1)^{-1}, M+1]$.

Este resultado está situado num problema amplo que consiste em estudar o conjunto das raízes de uma família de polinômios cujos coeficientes são restritos por certas condições. O trabalho [2] analisa polinômios cujos coeficientes são zeros e uns, provando que o fecho do conjunto das raízes complexas destes polinômios é conexo por caminhos. Este conjunto, aliás, tem aparência fractal. Existem ainda resultados relacionando raízes à irredutibilidade de polinômios. Raízes de polinômios com coeficientes aleatórios ocorrem em alguns problemas científicos e de engenharia.

Consideraremos aqui a família de polinômios com coeficientes inteiros entre $-M$ e M, para M genérico. Será necessário analisar também séries de potências com os coeficientes restritos pelas mesmas condições. O resultado principal é obtido utilizando propriedades elementares de análise real. Obtivemos também alguns resultados no plano complexo e para estes usamos algumas propriedades conhecidas de variável complexa.

O presente trabalho foi realizado dentro de um projeto de Iniciação Científica do CNPq sob a orientação do prof. Artur Lopes.

Seja $M \in \mathbf{N} = \{1,2,3,...\}$ fixo. Definimos os seguintes conjuntos limitados de números inteiros

$$\Gamma = \{n \in \mathbf{Z}; \quad |n| \leq M\}, \quad \Gamma^* = \Gamma - \{0\},$$

Definimos a família de polinômios com coeficientes em Γ

$$\text{Pci} = \left\{p;\ p(\upsilon) = \sum_{k=0}^{G} a_k \upsilon^k,\quad G \in \mathbf{N},\quad a_k \in \Gamma,\ \forall k,\quad a_0 \neq 0\right\}.$$

(Excluímos os polinômios com termo constante zero porque suas raízes não-nulas são também raízes de polinômios de menor grau.) Estamos interessados nos seguintes conjuntos de raízes:

$$P_C = \{z \in \mathbf{C};\ \exists\, p \in \text{Pci tal que } p(z) = 0\},\quad P_{\mathbf{R}} = P_C \cap \mathbf{R},\quad P_{\mathbf{Q}} = P_C \cap \mathbf{Q}.$$

Observe que Pci é enumerável: para cada G existem $2M\,(2M+1)^G$ polinômios $p \in$ Pci de grau G. Assim, P_C também é enumerável.

O conjunto $P_{\mathbf{Q}}$ é descrito pela proposição abaixo.

Proposição 1. $P_{\mathbf{Q}} = \left\{\dfrac{m}{n};\quad m, n \in \Gamma^*\right\}.$

Demonstração: Se $m, n \in \Gamma^*$, então $x = \dfrac{m}{n} \in P_{\mathbf{Q}}$, pois é raiz da equação $nx - m = 0$. Reciprocamente, suponha que $\dfrac{m}{n} \in P_{\mathbf{Q}}$ seja uma fração irredutível. Temos, para algum $p \in$ Pci,

$$p\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{k=0}^{G} a_k m^k n^{-k} = 0.$$

Multiplicando por n^G,

$$a_0 n^G + a_1 m n^{G-1} + \cdots + a_{G-1} m^{G-1} n + a_G m^G = 0.$$

Sendo $a_0 \neq 0$, temos $m \neq 0$ e assim

$$\frac{a_0 n^G}{m} = -\left(a_1 n^{G-1} + a_2 m n^{G-2} + \cdots + a_{G-1} m^{G-2} n + a_G m^{G-1}\right).$$

Logo m divide $a_0 n^G$. Mas m é primo com n e então m divide a_0. Assim $|m| \le |a_0| \le M$. De maneira análoga, $0 \neq |n| \le |a_G| \le M$.

A próxima proposição mostra a simetria de P_C.

Proposição 2. (i) $z \in P_C \Rightarrow -z \in P_C$,

(ii) $z \in P_C \Rightarrow z^{-1} \in P_C$,

(iii) $z \in P_C \Rightarrow \bar{z} \in P_C$,

(iv) $z^n \in P_C,\quad n \in \mathbf{Z} - \{0\} \Rightarrow z \in P_C$.

Demonstração:

(i) Dado $z \in P_C$, seja $p(\upsilon) = \sum_0^G a_k \upsilon^k \in$ Pci tal que $p(z) = 0$. Então $-z$ é raiz de $p_1(\upsilon) = \sum_0^G (-1)^k a_k \upsilon^k = p(-\upsilon) \in$ Pci.

(ii) Dado $z \in P_C$, seja $p(\upsilon) = \sum_0^G a_k \upsilon^k \in$ Pci tal que $a_G \neq 0$ e $p(z) = 0$. Então z^{-1} (observe que $0 \notin P_C$) é raiz de $p_1(\upsilon) = \upsilon^G p(\upsilon^{-1}) = \sum_0^G a_k \upsilon^{G-k} \in$ Pci.

(iii) Se z é raiz de $p(\upsilon) = \sum_0^G a_k \upsilon^k \in$ Pci, então $\bar{z}$ também é raiz de p: $\overline{p(\bar{z})} = \sum_0^G \bar{a}_k z^k = p(z) = 0$ e $p(\bar{z}) = 0$.

(iv) Só precisamos demonstrar para n positivo, devido ao item (ii). Se z^n é raiz de $p(\upsilon) = \sum_0^G a_k \upsilon^k \in$ Pci, então z é raiz de $p_1(\upsilon) = p(\upsilon^n) = \sum_0^G a_k \upsilon^{nk} \in$ Pci.

Na proposição seguinte obtemos limites para $P_{\mathbf{R}}$.

Proposição 3. $P_{\mathbf{R}} \subset\ ]-(M+1),\ -(M+1)^{-1} \cup (M+1)^{-1},\ M+1[$.

Demonstração: Basta provar a afirmação

$$x \ge M + 1 \Rightarrow x \notin P_{\mathbf{R}}$$

A proposição segue desta afirmação, pois se $x \in P_{\mathbf{R}}$, então pela proposição 2, $|x|, |x|^{-1} \in P_{\mathbf{R}}$ e pela afirmação, $|x|, |x|^{-1} < M + 1$, donde $(M+1)^{-1} < |x| < M + 1$.

Seja então $x \ge M + 1$. Dado qualquer $p(\upsilon) = \sum_{k=0}^{G} a_k \upsilon^k \in$ Pci, mostraremos que $p(x) \neq 0$. Ora, x é positivo e $a_k \ge -M$. Então $p(x) = a_G x^G + \sum_{k=0}^{G-1} a_k x^k \ge a_G x^G - M \sum_{k=0}^{G-1} x^k$. Sendo $x > 1$ podemos escrever $p(x) \ge a_G x^G - M \dfrac{x^G - 1}{x - 1} = \dfrac{M}{x-1} + \left(a_G - \dfrac{M}{x-1}\right) x^G$. Suponha que $a_G > 0$. Neste caso, $0 < \dfrac{M}{x-1} \leq 1 \leq a_G$ e então $a_G - \dfrac{M}{x-1} \geq 0$. Além disso $x^G > 0$, donde $p(x) > 0$. Se for $a_G < 0$, o caso acima implica $(-p)(x) > 0$, i.e., $p(x) < 0$. De qualquer modo, $p(x) \neq 0$. (Evidentemente excluímos o caso $a_G = 0$).

Vamos agora voltar nossa atenção às séries de potências com coeficientes em Γ. Definimos a família

$$\text{Sci} = \left\{ f\,;\ \ f(\upsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon^k\,,\quad a_k \in \Gamma\,,\ \forall\, k,\quad a_0 \neq 0 \right\}.$$

(Excluímos as séries com termo constante zero porque suas raízes não-nulas são também raízes de outras séries em que o termo constante não se anula.) Observamos que Sci é uma família não-enumerável de funções. Além disso, Sci $\supset$ Pci.

Proposição 4. *Toda* $f \in$ Sci *tem raio de convergência 1 ou* ∞. *Além disso, f tem raio de convergência* ∞ *se e somente se f é um polinômio.*

Demonstração: Se $f(\upsilon) = \sum_0^{\infty} a_k \upsilon^k$ não é um polinômio, então $A = \{k \geq 1;\ a_k \neq 0\}$ é infinito. Logo $1 \leq |a_k|^{1/k} \leq M^{1/k}$, $\forall k \in A$. Fazendo $k \to \infty$, temos $\lim_{k \in A} |a_k|^{1/k} = 1$. Mas $1/R = \limsup |a_k|^{1/k}$ e assim $R = 1$.

Doravante consideraremos todas as funções em Sci como definidas apenas no disco $B(0;1)$. São, evidentemente, funções analíticas.

Definimos os conjuntos de zeros

$$S_{\mathbf{C}} = \left\{ z \in \mathbf{C}\,;\ |z| < 1\,,\ \ \exists f \in \text{Sci tal que } f(z) = 0 \right\},\quad S_{\mathbf{R}} = S_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{R}.$$

Valem as inclusões $P_{\mathbf{C}} \cap B(0;1) \subset S_{\mathbf{C}}$ e $P_{\mathbf{R}} \cap\,]-1\,,1[\, \subset S_{\mathbf{R}}$.

A próxima proposição exibe algumas propriedades básicas de $S_{\mathbf{C}}$.

Proposição 5. (i) $z \in S_{\mathbf{C}} \Rightarrow -z \in S_{\mathbf{C}}$,

(ii) $z \in S_{\mathbf{C}} \Rightarrow \bar{z} \in S_{\mathbf{C}}$,

(iii) $z^n \in S_{\mathbf{C}}$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow z \in S_{\mathbf{C}}$.

Demonstração:

(i) Dado $z \in S_{\mathbf{C}}$, seja $f(\upsilon) = \sum_0^{\infty} a_k \upsilon^k \in$ Sci tal que $f(z) = 0$. Então $-z$ é raiz de $f_1(\upsilon) = \sum_0^{\infty} (-1)^k a_k \upsilon^k = f(-\upsilon) \in$ Sci .

(ii) Se z é raiz de $f(\upsilon) = \sum_0^{\infty} a_k \upsilon^k \in$ Sci , então $\bar{z}$ também é raiz de f :

$$\overline{f(\bar{z})} = \lim_{G \to \infty} \overline{\sum_0^G a_k \bar{z}^k} = \lim_{G \to \infty} \sum_0^G \bar{a}_k z^k = f(z) = 0 \cdot$$

(iii) Se z^n é raiz de $f(\upsilon) = \sum_0^{\infty} a_k \upsilon^k \in$ Sci, então z é raiz de $f_1(\upsilon) = f(\upsilon^n) = \sum_0^{\infty} a_k \upsilon^{nk} \in$ Sci.

Proposição 6. $S_{\mathbf{R}} \subset\,]-1\,, -(M+1)^{-1}] \cup [(M+1)^{-1}\,, 1[$.

Demonstração: Basta provar a afirmação

$$0 < x < \frac{1}{M+1} \Rightarrow x \notin S_{\mathbf{R}}\,.$$

A Proposição segue desta afirmação, pois se $x \in S_{\mathbf{R}}$, então pela prop. 5, $|x| \in S_{\mathbf{R}}$ e pela afirmação, ou $|x| \leq 0$, ou $|x| \geq (M+1)^{-1}$. Sendo $x \neq 0 \notin S_{\mathbf{R}}$, temos $(M+1)^{-1} \leq |x| < 1$.

Seja então $0 < x < (M+1)^{-1}$. Dada qualquer $f(\upsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon^k \in$ Sci, mostraremos que $f(x) \neq 0$. Ora, x é positivo e $a_k \geq -M$. Então

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \geq a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} x^k = a_0 - \frac{Mx}{1-x}.$$

Sendo $x^{-1} > M + 1$, temos $\dfrac{M}{x^{-1} - 1} < 1$ e $f(x) > a_0 - 1$. Suponha que seja $a_0 > 0$. Neste caso, $a_0 - 1 \geq 0$, donde $f(x) > 0$. Se for $a_0 < 0$, o caso acima implica $(-f)(x) > 0$, i.e., $f(x) < 0$. De qualquer modo, $f(x) \neq 0$.

Para demonstrar a próxima proposição (prop. 8) precisaremos do seguinte lema, que é uma adaptação do Lema 3.1 de [2].

Lema 7. *Sejam z um número complexo fixo, $|z| < 1$ e $W \subset \mathbf{C}$ um conjunto limitado tais que $W \subset z \bigcup_{a \in \Gamma} (a + W)$.*

Nessas condições, todo $w_0 \in W$ é da forma $w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, com $a_k \in \Gamma$, $\forall k$. Em particular, se $W \cap \Gamma^* \neq \phi$, então $z \in S_C$.

Demonstração: Dado $w_0 \in W$ existem $a_1 \in \Gamma$ e $w_1 \in W$ tais que $w_0 = a_1 z + z w_1$. Indutivamente, para $w_{m-1} \in W$ existem $a_m \in \Gamma$ e $w_m \in W$ tais que $w_{m-1} = a_m z + z w_m$. Substituindo, temos

$$w_0 = a_1 z + a_2 z^2 + z^2 w_2 = \cdots = \sum_{k=1}^{m} a_k z^k + z^m w_m .$$ Agora fazemos $m \to \infty$. Ora, $z^m w_m \to 0$, porque $|z| < 1$ e w_m é limitado. Assim, $w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Se $w_0 \in \Gamma^*_{}$, z é uma raiz de $f(\upsilon) = -w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in$ Sci.

Proposição 8. $]-1, -(M+1)^{-1}] \cup [(M+1)^{-1}, 1[\subset S_R$.

Demonstração: Seja $\pm X = \{x; x \in X$ ou $-x \in X\}$. Dado um número $x \in \pm[(M+1)^{-1}, 1[$ seja $W = [-1,1]$. Então

$$x \bigcup_{a \in \Gamma} (a + W) = x \bigcup_{a \in \Gamma} [a - 1, a + 1] =$$
$$= x[-(M+1), M+1] = [-(M+1)|x|, (M+1)|x|] \supset [-1,1] = W$$

(A última inclusão decorre da hipótese $|x| \geq (M+1)^{-1}$.) Além disso, $W \cap \Gamma^* = \{-1, 1\} \neq \phi$. O lema 7 fornece $x \in S_C \cap \mathbf{R} = S_R$.

Os resultados das proposições 6 e 8 podem ser reunidos no seguinte

Teorema 9. $S_R =]-1, -(M+1)^{-1}] \cup [(M+1)^{-1}, 1[$.

Observamos que S_R é fechado em $]-1,1[$. A proposição seguinte (prop. 11) mostra que algo semelhante vale para S_C. Antes porém precisaremos do lema abaixo.

Lema 10. *Toda sequência de funções em* Sci *possui uma subseqüência que converge pontualmente para um função em* Sci*, sendo a convergência uniforme em todo conjunto compacto contido em $B(0;1)$.*

Demonstração: Seja $F \subset$ Sci o conjunto das funções da seqüência. Se F é finito, basta escolher uma subseqüência constante. Suponha F infinito. A demonstração basear-se-á no fato de que os coeficientes das funções em Sci estão num conjunto finito Γ. (Usaremos a notação $\mathrm{coef}_k(f) = a_k$, onde $f(\upsilon) = \sum_0^{\infty} a_k \upsilon^k$.)

Podemos achar um número $a_0 \in \Gamma^*$ e um conjunto infinito $F_0 \subset F$ tais que $\mathrm{coef}_0(f) = a_0$, $\forall f \in F_0$. Indutivamente, dado F_{n-1} infinito, achamos $a_n \in \Gamma$ e $F_n \subset F_{n-1}$ infinito de modo que $\mathrm{coef}_n(f) = a_n$, $\forall f \in F_n$. Formamos assim uma sequência de conjuntos infinitos $F \supset F_0 \supset F_1 \supset \cdots$. Escolhemos $f_0 \in F_0$, e por indução, $f_n \in F_n - \{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$. Temos $0 \leq k \leq n \Rightarrow \mathrm{coef}_k(f_n) = a_k$. Finalmente definimos $g(\upsilon) = \sum_0^{\infty} a_k \upsilon^k \in$ Sci. Então

$$f_n(\upsilon) - g(\upsilon) = R(\upsilon) = \upsilon^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \upsilon^k, \text{ com } |b_{nk}| \leq 2M .$$

Seja $K \subset B(0;1)$ compacto. Podemos achar $r < 1$ tal que $K \subset B[0;r]$. Então, para todo $\upsilon \in K$,

$$|R(\upsilon)| = \left|\upsilon^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \upsilon^k\right| \leq \frac{2M|\upsilon|^{n+1}}{1 - |\upsilon|} \leq \frac{2Mr^{n+1}}{1 - r} .$$

Assim, no domínio K, $R \xrightarrow{\text{unif}} 0$, isto é, $f_n \xrightarrow{\text{unif}} g$.

Obs.: Uma outra alternativa para demonstrar este lema é usar análise complexa (teorema de Montel - veja [1], por exemplo).

Proposição 11. *S_C é fechado em $B(0;1)$. (Isto é, $S_C = \overline{S_C} \cap B(0;1)$.)*

Demonstração: Basta provar a inclusão $\overline{S_C} \cap B(0;1) \subset S_C$ (a recíproca é óbvia). Seja então $c \in \overline{S_C} \cap B(0;1)$. Existe uma seqüência (f_n) em Sci com raízes $z_n \in S_C$ que tendem para c. Seja $K \subset B(0;1)$ o compacto $K = \{c, z_0, z_1, \ldots\}$. (Aqui usamos o fato de que $|c| < 1$). Usando o lema 10, podemos, por simplicidade, supor que a seqüência (f_n) converge uniformemente para $f \in$ Sci no domínio K. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $m > n_0 \Rightarrow |f_m(z_n) - f(z_n)| < \varepsilon$, $\forall n$. Assim,

$n > n_0 \Rightarrow |f(z_n)| = |f_n(z_n) - f(z_n)| < \varepsilon$. Isto mostra que $f(z_n) \to 0$ donde, por continuidade, $f(c) = 0$. Segue que $c \in S_C$.

Exploraremos agora algumas relações entre os zeros das séries e os zeros dos polinômios. Isso vai nos permitir caracterizar o conjunto $\overline{P_R}$.

O teorema abaixo mostra que, no espaço $B(0;1)$, o conjunto $P_C \cap B(0;1)$ é denso em S_C.

Teorema 12. $S_C = \overline{P_C} \cap B(0;1)$.

Demonstração: Temos $\overline{P_C} \cap B(0;1) \subset \overline{S_C} \cap B(0;1) = S_C$, pela prop. 11. Resta mostrar que $S_C \subset \overline{P_C}$. Dado $z \in S_C$, existe $f(\upsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon^k \in$ Sci, com domínio $B(0;1)$, tal que $f(z) = 0$. A função f tem suas raízes isoladas (porque é analítica), e assim podemos achar $2r > 0$ tal que f não se anula em $B[z;2r] - \{z\} \subset B(0;1)$. Definamos agora a seqüência de polinômios $p_n(\upsilon) = \sum_{k=0}^{n} a_k \upsilon^k \in$ Pci, com $n \in \mathbf{N}$. Pelo Teorema de Hurwitz (Teor. VII.2.5 de [1], p. 152), existe n^* tal que, para $n > n^*$, p_n e f têm o mesmo número de raízes em $B[z;r]$, se as raízes forem contadas de acordo com as suas multiplicidades. Logo podemos achar, para cada $n > n^*$, um $z_n \in B[z;r]$ tal que $p_n(z_n) = 0$. Então $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = 0$, porque $|f(z_n)| = |f(z_n) - p_n(z_n)| \leq \sup_{\upsilon \in B[z;r]} |f(\upsilon) - p_n(\upsilon)| \to 0$. Afirmamos que $z_n \to z$. De fato, se a afirmação fosse falsa, para algum $\varepsilon > 0$ o conjunto $A = \{n > n^*;\ \varepsilon \leq |z_n - z| \leq r\}$ seria infinito. Assim, por compacidade, poderíamos obter uma subseqüência (z_{n_j}), com $n_j \in A$, convergindo para um $z' \neq z$. Então $0 = \lim_{j\to\infty} f(z_{n_j}) = f\left(\lim_{j\to\infty} z_{n_j}\right) = f(z')$, e f teria outra raiz z' em $B[z;r]$, absurdo. Logo, vale a afirmação. Estando a seqüência (z_n) contida em P_C, temos $z \in \overline{P_C}$.

Mostraremos a seguir que vale o resultado análogo ao teorema 12 para o caso de raízes reais, isto é, que $S_R = \overline{P_R} \cap]-1,1[$. A demonstração consiste basicamente em provar que os zeros reais das séries podem ser arbitrariamente aproximados por zeros reais dos polinômios.

Se queremos aproximar um zero x de uma função $f \in$ Sci por zeros de polinômios, a maneira mais natural é achar uma seqüência p_n em Pci, com respectivos zeros x_n, de modo que x_n tende a x. No caso complexo ($x, x_n \in \mathbf{C}$) isso

é sempre possível, como vimos na demonstração do teorema 12. Porém, no caso real, é possível que existam séries em Sci com raízes reais cujas aproximações por polinômios de Pci não possuam raízes reais na vizinhança. Porém, o lema a seguir mostra que a "maioria" das séries não se comporta desta forma, e isto será suficiente para a demonstração do teorema.

Lema 13. *Seja* $f(\upsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon^k \in$ Sci *tal que os conjuntos* $\{k \geq 0;\ a_k \neq M\}$ *e* $\{k \geq 0;\ a_k \neq -M\}$ *sejam ambos infinitos. Nessas condições, se* $x_0 \in]0,1[$ *é zero da função f então* $x_0 \in \overline{P_R}$.

Demonstração: Seja $V \subset]0,1[$ uma vizinhança compacta de x_0. Mostraremos que existem $x \in V$ e $p \in$ Pci tais que $p(x) = 0$. Como f não é identicamente nula, existe $x_1 \in V$ tal que $[x_0, x_1] \subset V$ e $f(x_1) \neq 0$. Podemos supor $f(x_1) > 0$ (se fosse $f(x_1) < 0$ bastaria trocar f por $-f$).

Construiremos agora uma seqüência de polinômios p_n em Pci, tendendo a f uniformemente em V, tal que $p_n(x) < f(x), \forall x \in V$. Seja então $s = \sup V$. Temos $0 < s < 1$. Logo existe $m \geq 0$ inteiro tal que $Ms^{m+1} < 1 - s$. Sendo o conjunto $\{k \geq 0;\ a_k \neq -M\}$ infinito, podemos escrevê-lo na forma $\{k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots\}$. Defina agora os polinômios

$$p_n(\upsilon) = -\upsilon^{k_n} + \sum_{k=0}^{k_n + m} a_k \upsilon^k .$$

É fácil ver que esta seqüência está em Pci e converge para f uniformemente nos compactos (de $]-1,1[$, é claro). Além disso, dado $x \in V$, temos

$$f(x) - p_n(x) = x^{k_n} + \sum_{k=k_n+m+1}^{\infty} a_k x^k \geq x^{k_n} + \sum_{k=k_n+m+1}^{\infty} (-M) x^k =$$

$$= x^{k_n}\left(1 - Mx^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} x^j\right) = x^{k_n}\left(1 - \frac{Mx^{m+1}}{1-x}\right).$$

O último termo é positivo, pois $1 - x - Mx^{m+1} \geq 1 - s - Ms^{m+1} > 0 \Rightarrow \dfrac{Mx^{m+1}}{1-x} < 1$.

Assim, $p_n(x) < f(x)$.

Deste modo, temos:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow f(x) - \varepsilon < p_n(x) < f(x)\ \forall x \in V$.

Seja $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_1) > 0$. Definindo $p = p_{n_0}$, temos, pelas desigualdades acima, $p(x_0) < 0$ e $p(x_1) > 0$. Pelo teor do valor intermediário, existe um número $x \in [x_0, x_1]$ tal que $p(x) = 0$.

Teorema 14. $S_{\mathbf{R}} = \overline{P_{\mathbf{R}}} \cap]-1,1[$.

Demonstração: Temos $\overline{P_{\mathbf{R}}} \cap]-1,1[\subset \overline{S_{\mathbf{R}}} \cap]-1,1[= S_{\mathbf{R}}$, pela prop. 9. Resta mostrar que $S_{\mathbf{R}} \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$, isto é, que o conjunto $L = S_{\mathbf{R}} - \overline{P_{\mathbf{R}}}$ é vazio. O fato abaixo vai simplificar a demonstração.

Afirmação: $x \in L \Rightarrow -x \in L$.

Prova: Pela prop. 5-(i), $-x \in S_{\mathbf{R}}$. Além disso, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \notin P_{\mathbf{R}}$. Logo $|y - (-x)| < \varepsilon \Rightarrow |(-y) - x| < \varepsilon \Rightarrow -y \notin P_{\mathbf{R}} \Rightarrow$ (pela pro. 2-(i)) $y \notin P_{\mathbf{R}}$. Isso mostra que $-x \notin \overline{P_{\mathbf{R}}}$.

Assim sendo, é suficiente provarmos que $L_+ = \{x \in L; x > 0\}$ é vazio. Suponhamos que existe $x \in L_+$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap P_{\mathbf{R}} = \phi$. Devido ao teorema 9, existe um intervalo fechado $J \neq \{x\}$ tal que $x \in J \subset S_{\mathbf{R}} \cap]0,1[$. Defina $I = J \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. Assim, $I \subset S_{\mathbf{R}}$ é um intervalo fechado não-puntual de números positivos tal que $I \cap P_{\mathbf{R}} = \phi$. Dado $x_0 \in I$, existe $f \subset$ Sci tal que $f(x_0) = 0$. Devido ao lema 13, devemos ter $f \in F$, onde F é a família de funções

$$F = \{f(\upsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon^k \in \text{Sci}; \text{existem } c \in \{-M, M\} \text{ e } K \geq 0 \text{ tais que}$$
$$k \geq K \Rightarrow a_k = c\}$$

É fácil ver que F é enumerável. Mas cada função $f \in$ Sci tem um número finito (≥ 0) de raízes no compacto $I \subset]-1,1[$. Logo o conjunto de todas as raízes em I de funções em F é enumerável. Chegamos a uma contradição, pois esse conjunto é o próprio I, que é não-enumerável.

Apresentaremos dois corolários importantes do teorema 14, mas antes demonstraremos um fato simples sobre os fechos:

Proposição 15. $z \in \overline{P_{\mathbf{C}}} \Leftrightarrow z^{-1} \in \overline{P_{\mathbf{C}}}$; $\quad x \in \overline{P_{\mathbf{R}}} \Leftrightarrow x^{-1} \in \overline{P_{\mathbf{R}}}$.

Demonstração: $z \in \overline{P_{\mathbf{C}}} \Rightarrow$ existe seqüência (z_n) em $P_{\mathbf{C}}$ convergindo para $z \Rightarrow$ a seqüência (z_n^{-1}) está em $P_{\mathbf{C}}$ (pela prop. 2-(ii)) e converge para $z^{-1} \Rightarrow z^{-1} \in \overline{P_{\mathbf{C}}}$. A prova é análoga para o caso real.

Corolário 16. $\overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{R} = \overline{P_{\mathbf{R}}}$.

Demonstração: É suficiente mostrar que $\overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{R} \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Seja $x \subset \overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{R}$. Se $|x| < 1$ então, pelo teorema 12, $x \in S_{\mathbf{C}} \cap]-1,1[= S_{\mathbf{R}}$ e pelo teorema 14, $x \in \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Se $|x| = 1$ então $x \in P_{\mathbf{R}}$ e se $|x| > 1$ basta usar a prop. 15.

O resultado abaixo é mais uma conseqüência direta do teorema 14, mas vamos enunciá-lo como teorema devido à sua importância.

Teorema 17. $\overline{P_{\mathbf{R}}} = [-(M+1), -(M+1)^{-1}] \cup [(M+1)^{-1}, M+1]$

Demonstração: Temos pela prop. 3, $\overline{P_{\mathbf{R}}} \subset \pm[(M+1)^{-1}, M+1]$. Segue dos teoremas 9 e 14 que $\pm[(M+1)^{-1}, 1[\subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Pela prop. 15, $\pm]1, M+1] \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Temos ainda $\{-1,1\} \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$, o que completa a demonstração.

Referências

[1] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag (1978).

[2] A.M. Odlyzko e **B**. Poonen, *Zeros of Polynomials with 0,1 Coefficients*, L'Enseignement Mathématique, t. **39** (1993), p. 317-348.

Instituto de Matemática - UFRGS