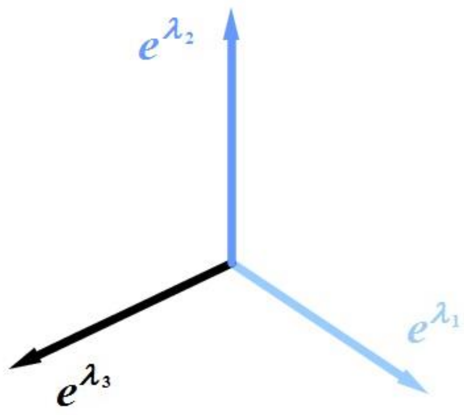

Expoentes de Lyapunov e Decomposição de Oseledets

David Boaventura Mesquita
Mestrado em Matemática
Departamento de Matemática
Outubro de 2013

Orientador
José Ferreira Alves
Professor Associado com Agregação
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

U.PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

DAVID BOAVENTURA MESQUITA

Expoentes de Lyapunov e Decomposição de Oseledets

Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador

Professor Doutor José Ferreira Alves

Outubro de 2013

Agradecimentos

Ao Professor José Ferreira Alves, pela proposta de um tema agradável e estimulante, pela orientação eficiente e pela liberdade que me fizeram crescer como matemático.

Ao Professor Jairo Bochi, pelas explicações, pelas sugestões e pela ajuda generosa que enriqueceram este trabalho e a mim também.

À minha família, pela compreensão e apoio constantes.

A todas as pessoas que tornaram o meu percurso académico mais colorido, desde colegas e amigos a professores e funcionários.

Obrigado.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos e demonstramos uma versão do Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets para espaços de Lebesgue. Seguimos uma tradição de provas iniciada por M. Raghunathan que explora o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman, o qual também apresentamos e demonstramos. Pelo meio, analisamos o Teorema de Furstenberg-Kesten visto como um corolário do último e uma forma seminal do primeiro.

Palavras chave: Teoria Ergódica, Teorema Ergódico Multiplicativo, Teorema Ergódico Subaditivo, Teorema de Furstenberg-Kesten, Fibrado Vetorial, Difeomorfismo, Cociclo Linear, Expoente de Lyapunov, Decomposição de Oseledets.

Abstract

In this dissertation, we present and prove a version of Oseledets' Multiplicative Ergodic Theorem for Lebesgue spaces. We follow an approach by M. Raghunathan exploring Kingman's Subadditive Ergodic Theorem, which we also present and prove. Along the way, we analyse Furstenberg-Kesten's Theorem, seen as a corollary of the last and a seminal form of the first.

Keywords: Ergodic Theory, Multiplicative Ergodic Theorem, Subadditive Ergodic Theorem, Furstenberg-Kesten Theorem, Vector Bundle, Diffeomorphism, Linear Cocycle, Lyapunov Exponent, Oseledets Decomposition.

Conteúdo

Introdução

Motivação e História

A Teoria Ergódica, área na qual se insere este trabalho, é a disciplina da Matemática que estuda sistemas dinâmicos munidos de *medidas invariantes*. Há várias definições possíveis para o que se entende ser um sistema dinâmico. Em geral, os seguintes elementos devem estar presentes: um *espaço de fase* X, constituído pelos possíveis *estados* do sistema, que normalmente tem alguma estrutura extra (por exemplo topológica, mensurável ou diferenciável); um *tempo*, que pode ser contínuo ou discreto, extensível apenas para o futuro ou simultaneamente também para o passado; uma *lei de evolução temporal*, que nos indica os estados do sistema num dado instante a partir dos estados do sistema em instantes anteriores. O objetivo geral da Teoria de Sistemas Dinâmicos é estudar a evolução de tais sistemas com o tempo. Neste trabalho, adotaremos um modelo de dinâmica discreta. A lei de evolução temporal é neste caso uma transformação

$$T : X \to X$$

que ao estado $x \in X$ no instante t associa o estado Tx no instante $t+1$. O tempo é assim naturalmente modelado pelos números naturais $\mathbb{N}$, quando o processo é *irreversível* ou *não-invertível*, ou então pelos inteiros $\mathbb{Z}$, quando estamos na presença de uma dinâmica *reversível* ou *invertível*. O desafio genérico para o presente modelo é estudar o comportamento das órbitas $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N},\mathbb{Z}}$.

Para a Teoria Ergódica, o espaço de fase deve ser um *espaço de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, normalmente finita ou quando muito σ-finita, preferencialmente com boas propriedades adicionais - uma classe importante nesta área são os chamados *espaços de Lebesgue*. Neste trabalho, lidaremos apenas com espaços de probabilidade (i.e., aqueles em que $\mu(X) = 1$) que são, por assim dizer, o protótipo dos espaços de medida finita. A transformação T deve preservar a estrutura mensurável do espaço querendo isso dizer que

$$T^{-1}(E) \in \mathcal{A}, \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

A invariância (ou preservação) da medida significa assim que

$$\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E), \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

A preservação de uma medida *per se* fornece informação diversa sobre o sistema. Um exemplo clássico disso mesmo é devido a H. Poincaré quando estudava o movimento dos astros, no final do século XIX. Este notou propriedades de recorrência assinaláveis nos sistemas da Mecânica Celeste, de facto válidas para quaisquer sistemas com medidas invariantes, substanciadas no seu célebre *Teorema de Recorrência*. Este afirma que quase todos os pontos de um conjunto mensurável $E \in \mathcal{A}$ arbitrário retornam (e infinitas vezes!) a esse conjunto, i.e.,

$$\mu(\{x \in E \, : \, \{T^n(x)\}_{n \geqslant N} \subset X \backslash E\}) = 0, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

As origens da Teoria Ergódica remontam (pelo menos) à famosa *hipótese ergódica* do físico L. Boltzmann formulada no contexto da Mecânica Estatística (mais precisamente, na Teoria Cinética dos Gases), também nos finais do século XIX. A afirmativa moderna que folcloriza esta hipótese (em verdade, uma consequência da hipótese ergódica original de Boltzmann, sobre as trajétorias visitarem todos os estados compatíveis com um dado nível de energia) é a seguinte.

> «*A média temporal de grandezas observáveis ao longo de órbitas típicas coincide com a média espacial.*»

De facto, hoje sabemos bem que esta hipótese é falsa em geral, e os sistemas especiais para os quais ela é válida dizem-se *ergódicos*. Teríamos de esperar até aos anos 30 para ver o desenvolvimento sistemático da Teoria Ergódica como disciplina matemática, a partir de uma formalização mais séria da hipótese ergódica. Por essa altura, é devida a G. Birkhoff ([6], 1931) uma versão do célebre *Teorema Ergódico*. À luz da hipótese ergódica, o objeto principal deste resultado são as *médias temporais* de uma grandeza observável $\phi : X \to \mathbb{R}$ no espaço definidas por

$$\phi^*(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x).$$

Naturalmente, não há razão nenhuma para esperar que estas médias existam sempre e muito menos saber para onde convergem. Todavia, para grandezas $\phi \in L^1(\mu)$, Birkhoff mostrou que esse é o panorama típico do ponto de vista da medida pelo que quando o sistema é ergódico estas coincidem justamente com a média espacial:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x) = \int \phi \, d\mu.$$

Sensivelmente pela mesma altura, outra versão do Teorema Ergódico foi provado por J. Von Neumann ([40], 1932), esta formulada num contexto funcional e menos geral do espaço $L^2(\mu)$, inspirado em trabalhos de B. Koopman sobre grupos de operadores unitários em espaços de Hilbert que deram forma à hipótese ergódica. A par do resultado de Birkhoff, estas constituem as versões clássicas do Teorema Ergódico.

Na segunda metade do século XX, a Teoria Ergódica começou a mudar dum paradigma funcional para um probabilístico, muito devido à introdução do conceito de *entropia* por A. Kolmogorov em torno de 1958, mais ou menos ao mesmo tempo que Y. Sinai, movidos pelo conceito homónimo proposto por C. Shannon no âmbito da Teoria da Informação em meados dos anos 20. Isto marcou um ponto de viragem da teoria, com novos desenvolvimentos.

No final da década de 60, surgiram generalizações do Teorema Ergódico que constituem o *leit-motiv* da presente dissertação. A primeira deve-se ao matemático J. Kingman e é conhecida como o *Teorema Ergódico Subaditivo*. Apesar do nome ergódico, este teorema foi um corolário de trabalhos transversais à Teoria Ergódica. Segundo consta, foi publicado em ([20], 1968), numa altura em que o autor se encontrava a estudar *processos subaditivos*, introduzidos anos antes no âmbito dos processos estocásticos por Hammersley e Welsh. Sugerimos ([19], 1973) para um apanhado geral de *Teoria Ergódica Subaditiva*, fundada pelo autor. Em termos simples, este estabelece, à semelhança do Teorema Ergódico, a existência em quase todo o ponto de 'médias' associadas a *sucessões subaditivas* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e., objetos da forma

$$\phi^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \phi_n(x),$$

nas quais se enquadram as *somas temporais* de Birkhoff (processos aditivos)

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x).$$

A demonstração de Kingman usava uma ideia de redução, decompondo processos subaditivos como somas de processos aditivos e subaditivos não-negativos. Provas simplificadas e mais focadas foram entretanto aparecendo na literatura matemática: bastará mencionar a de B. Weiss e Y. Katznelson ([18], 1982) inspirada nos métodos de *análise não-standard* de T. Kamae para a demonstração do Teorema Ergódico clássico ([14], 1982); a de J. Steele ([36], 1989) e a de K. Schürger ([35], 1991), esta última mais geral. A prova da presente dissertação ([3], 2009) é um acréscimo nesta linha, com um ponto possivelmente original ao considerar somas de Birkhoff especiais sem contudo depender do Teorema Ergódico.

Curiosamente no mesmo ano, o ainda jovem matemático russo V. Oseledets, aluno de doutoramento de Y. Sinai, publicou o seu famoso *Teorema Ergódico Multiplicativo* ([28], 1968), um subproduto da sua tese doutoral que havia demonstrado em 1965 e apresentado no ano seguinte por ocasião do Congresso Internacional de Matemáticos em Moscovo. A motivação dos objetos presentes no enunciado deste resultado remonta a trabalhos anteriores de A. Lyapunov ([23], a versão original em Russo é datada de 1892), no contexto da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, mais precisamente, sobre a estabilidade das soluções associadas. Entre eles, encontramos os agora chamados *expoentes de Lyapunov* e uma noção de *regularidade* correlata também visível e desenvolvida nos trabalhos de O. Perron ([29], 1930). Uma monografia aprofundada sobre a teoria desenvolvida a partir destes trabalhos é ([9], 1966), de D. Bylov, R. Vinograd, D. Grobman e V. Nemyckii. O Teorema de Oseledets vem afirmar que tal regularidade, geralmente rara do ponto de vista topológico, é típica do ponto de vista da medida, sem contudo descrevê-la. As ideias da prova de Oseledets têm um caráter eminentemente algébrico (envolvem produtos exteriores, etc.), reduzindo o caso dos cociclos lineares gerais ao dos *cociclos triangulares* e usando o Teorema Ergódico clássico para estes últimos.

Muitas demonstrações alternativas e versões mais gerais surgiram desde então. Entre as principais, colocamos à cabeça a de M. Raghunathan ([31], 1979), baseada no Teorema Ergódico Subaditivo - mais precisamente, via Teorema de Furstenberg-Kesten ([12], 1960), dele facilmente dedutível, em combinação com a decomposição em valores singulares de uma matriz - com uma extensão para *corpos locais*, como o dos números p-ádicos. Seguiram-se outras: temos versões de dimensão infinita de D. Ruelle ([33], 1982) para espaços de Hilbert e de R. Manẽ ([25], 1983) para espaços de Banach (ver também [24], [34]); a de V. Kaimanovich ([13], 1989) para grupos de Lie semisimples e inspirada nesta a de A. Karlson e G. Margulis ([16],

1999) para alguns espaços com curvatura não-positiva (ver também [10]); por fim, em tempos mais recentes, destacamos a de A. Karlsson e F. Ledrappier para o grupo de isometrias de espaços métricos próprios ([15], 2006). E mais se poderiam acrescentar: sugerimos [2] para uma lista mais ou menos exaustiva bem como um tratado completo no assunto. A demonstração apresentada nesta dissertação, desenhada por J. Bochi ([7], 2008), segue uma tradição iniciada com Raghunathan e continuada por outros (i.e., via Teorema Ergódico Subaditivo), com a ressalva de que os cálculos matriciais para a construção de espaços invariantes típicos dessas provas, marcas indeléveis do caráter algébrico das mesmas, se transformam agora numa construção direta de subespaços complementares de maior taxa de crescimento exponencial e no estudo da ação dos cociclos sobre o espaço projetivo euclideano (que permite realizar imediatamente os menores expoentes como limites), ideias descendentes de R. Manẽ ([24], 1987) e P. Walters ([41], 1993), respetivamente.

Para completar esta introdução, não poderíamos deixar de mencionar os trabalhos de Y. Pesin ([30], 1977) que a par dos de Lyapunov, Perron e Oseledets já referidos marcaram os inícios da *Dinâmica Não-Uniformemente Hiperbólica* como disciplina independente, atualmente uma das áreas fervilhantes e abrangentes da investigação em Teoria Ergódica Diferenciável/Sistemas Dinâmicos, versando sobre sistemas com expoentes de Lyapunov não-nulos. Uma introdução neste tópico é o livro do próprio e de L. Barreira ([5], 2007).

Estrutura da dissertação

Podemos dizer que o objetivo principal deste trabalho é a demonstração duma versão do Teorema de Oseledets explorando o Teorema de Kingman. Isso significa que apesar de ser nosso intuito a apresentação e demonstração de ambos, uma ênfase primária deve ser dado ao primeiro em detrimento do segundo que será, por assim dizer, parte de um caminho possível para chegar ao primeiro. Quer-se com isso evidenciar ainda a assimetria de originalidade e esforço envolvidos em ambos, substancialmente maiores para o primeiro.

O leitor que deseja apenas um contacto superficial com os resultados principais desta dissertação sem maior compromisso tem no Capítulo 1 uma apresentação dos mesmos. Os Capítulos 2 e 3 são inteiramente devotados às demonstrações dos Teoremas de Kingman e Oseledets, respetivamente, se for desejada uma compreensão mais aprofundada. Dada a natureza deste trabalho, primamos por apresentar provas detalhadas e portanto mais extensas e dissecadas do que habitualmente se encontram noutros textos.

Por fim, incluímos alguns apêndices: os dois primeiros, A e B, sobre definições e factos gerais de Medida, Integração e Teoria Ergódica que achamos proveitosos; um terceiro, C, sobre cociclos lineares, com noções e propriedades que achamos adequado colocar numa secção separada da restante dissertação, em jeito de complemento.

Capítulo 1

Apresentação dos resultados

Este capítulo é dedicado à apresentação dos resultados principais desta dissertação. Pretendemos mostrar o fio condutor que liga o Teorema de Kingman ao de Oseledets, passando pelo de Furstenberg-Kesten, sem esquecer o Teorema Ergódico (de Birkhoff). A exposição dos tópicos para o Teorema de Kingman é primariamente baseada em [27] e [38]. Por sua vez, para o Teorema de Oseledets foram usadas [7], [24], [38] e [39]. Refiram-se também [2], [5] e [42] como fontes valiosas neste contexto.

1.1 Teorema de Kingman

Nesta secção, o ambiente será um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ com uma transformação mensurável $T : X \to X$ que preserva a probabilidade μ. Para motivar o primeiro dos teoremas principais deste trabalho, começaremos com uma análise mais aprofundada do Teorema Ergódico clássico [B.3]. As *somas temporais de Birkhoff*, definidas por

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x)$$

satisfazem a seguinte propriedade de *aditividade*:

$$\phi_{m+n} = \phi_m + \phi_n \circ T^m, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Sempre que $\phi = \phi_1 \in L^1(\mu)$, o Teorema Ergódico afirma que o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \phi_n(x)$$

existe em quase todo o ponto e que em média coincide com a média espacial $\int \phi \, d\mu$. Não é dificil verificar que este facto ocorre para toda a sucessão de funções $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ que satisfaça a propriedade (1.1) e a condição $\phi_1 \in L^1(\mu)$: bastará notar que tais sucessões são somas temporais de Birkhoff geradas precisamente pela função ϕ_1.

É legítimo questionar se esta convergência q.t.p. vale para sucessões $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ mais gerais. Este é o conteúdo do Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman, ao relaxar a aditividade em (1.1) para *subaditividade*. Introduzamos alguma nomenclatura conveniente.

Definição 1.1. Dizemos que uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[-\infty, \infty) := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ é *subaditiva*, se

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Da definição acima, deduzimos que para uma sucessão subaditiva vale $a_n \leqslant n a_1$, e portanto $\frac{a_n}{n} \leqslant a_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, temos toda a informação sobre o supremo

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} = \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} = a_1.$$

O seguinte facto elementar, particularmente elegante, exibe uma propriedade importante das sucessões subaditivas, fornecendo informação extra sobre o ínfimo e a convergência, sendo associado em alguns textos a Michael Fekete.

Lema 1.1. (Fekete) *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão subaditiva, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \in [-\infty, a_1].$$

Extenderemos a ideia de subaditividade mais geralmente a uma sucessão de funções com respeito a uma transformação, a qual generaliza a aditividade das somas de Birkhoff.

Definição 1.2. Dizemos que uma sucessão de funções $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ é *subaditiva com respeito a uma transformação* $T : X \to X$, se

$$\phi_{m+n} \leqslant \phi_m + \phi_n \circ T^m, \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente ao que aconteceu para sucessões subaditivas de números, para uma sucessão subaditiva $(\phi_n)_n$ tem-se

$$\phi_n \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \phi_1 \circ T^j,$$

relação que se mantém verdadeira considerando as funções ϕ_n^+ e ϕ_1^+. Assim, na suposição de todas as funções serem mensuráveis, a integrabilidade de ϕ_1^+ implica a de ϕ_n^+ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto, nessas condições, a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = \int \phi_n \, d\mu \in [-\infty, \infty)$$

é subaditiva. Como corolário do Lema de Fekete constatamos a existência do limite

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \phi_n \, d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int \phi_n \, d\mu \in [-\infty, \infty). \tag{1.2}$$

Este limite associado a sucessões subaditivas desempenha, no primeiro dos teoremas principais deste capítulo, um papel similar ao da *média espacial* no Teorema de Birkhoff [B.3].

Teorema A. (Kingman) *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva μ. Seja $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão subaditiva de funções mensuráveis com respeito a T tal que $\phi_1^+ \in L^1(\mu)$. Então existe uma função mensurável $\phi : X \to [-\infty, \infty)$ tal que*

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n(x)}{n}, \quad \text{para } \mu\text{-q.t.p. } x \in X.$$

Além disso, $\phi^+ \in L^1(\mu)$ e tem-se

1. *$\phi \circ T = \phi$ em μ-quase todo o ponto e*

2. *$\int \phi \, d\mu = L \in [-\infty, \infty)$,*

onde L é o limite dado por (1.2)*. Além disso, quando o sistema é ergódico ϕ é constante igual a L em quase todo o ponto.*

1.1.1 O Teorema de Furstenberg-Kesten

Em direção ao Teorema de Oseledets, veremos uma aplicação do Teorema de Kingman. Como exemplo motivacional, que retomaremos mais adiante, consideremos um difeomorfismo

$f : M \to M$ de uma variedade diferenciável M com uma métrica de Riemann $\|\cdot\|_x$ (diferenciável) que faz de cada fibra (espaço tangente) T_xM do fibrado tangente TM um espaço normado. Um dos aspetos essenciais no estudo da dinâmica, i.e., o comportamento de $f^n(x)$ para iterados de ordem elevada, prende-se com a expansão e contração gerada por f. Em certas circunstâncias, esse estudo é *linearizado* em termos do comportamento de $Df_x^n : T_xM \to T_{f^n(x)}M$ e o problema geral torna-se agora tentar compreender, para cada direção $v \in T_xM$, como $\|Df_x^n \cdot v\|_{f^n(x)}$ varia com n. Aqui estamos essencialmente preocupados com a frequência de um comportamento assintótico preciso destes iterados.

Numa primeira instância, analisemos o comportamento de $\|Df_x^n\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma do operador linear $Df_x^n : T_xM \to T_{f^n(x)}M$ induzida pela métrica de Riemann. Pela *regra da cadeia*,

$$Df_x^n = Df_{f^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ Df_{f(x)} \circ Df_x$$

e portanto, pela *submultiplicatividade* da norma, temos

$$\|Df_x^n\| \leqslant \|Df_{f^{n-1}(x)}\| \cdots \|Df_{f(x)}\|\|Df_x\|.$$

Em vista desta propriedade, uma formulação conveniente do problema é feita através da linguagem exponencial. Facilmente se deduz da desigualdade acima que a sucessão

$$\phi_n(x) = \log \|Df_x^n\|$$

é subaditiva com respeito a f. Assim, sob hipóteses adequadas, poderíamos tentar usar o Teorema Ergódico Subaditivo para concluir a existência de alguma convergência do tipo

$$\frac{1}{n} \log \|Df_x^n\| \to \phi(x)$$

de modo que $\|Df_x^n\| \approx e^{n\phi(x)}$, para iterados de ordem elevada. De facto, o que fizemos aqui para a norma poderíamos fazer também para a *conorma* da derivada definida por

$$m(Df_x^n) := \inf_{\|v\|_x=1} \|Df_x^n \cdot v\|_{f^n(x)}.$$

Uma vez que as aplicações $Df_x^n : T_xM \to T_{f^n(x)}M$ são isomorfismos lineares temos $m(Df_x^n) = \|(Df_x^n)^{-1}\|^{-1}$ e portanto a sucessão

$$\varphi_n(x) = \log \|(Df_x^n)^{-1}\| = -\log m(Df_x^n)$$

é também subaditiva com respeito a f. Valem conclusões semelhantes e assim balizamos de alguma forma o problema inicial.

Vejamos como extender este exemplo no contexto da Teoria Ergódica. Considere-se o espaço $GL(\mathbb{R}, d)$ das matrizes quadradas invertíveis $d \times d$ com entradas no corpo dos números reais. A norma matricial

$$\|L\| := \sup_{\|v\|=1} \|L(v)\|$$

induz nesse espaço uma topologia e por conseguinte uma σ-álgebra de Borel, que permite então falar naturalmente de mensurabilidade em aplicações que envolvam este espaço. Definimos também a *conorma* por

$$m(L) := \inf_{\|v\|=1} \|L(v)\|.$$

Uma vez que L é invertível, temos $m(L) = \|L^{-1}\|^{-1}$, como já foi observado. Dada uma aplicação $A : X \to GL(\mathbb{R}, d)$, uma transformação $T : X \to X$ e $n \geqslant 0$, escrevemos

$$A^{(n)}(x) := A(T^{n-1}x)A(T^{n-2}x) \cdots A(Tx)A(x).$$

Uma aplicação do Teorema Ergódico Subaditivo é mostrada no próximo resultado atribuído a Furstenberg e Kesten ([12]), que de facto é anterior no tempo (1960).

Teorema 1.1. (Furstenberg-Kesten) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação mensurável de X que preserva μ. Seja $A : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ uma aplicação mensurável tal que $\log^+ \|A^{\pm 1}(x)\| \in L^1(\mu)$. Então existem funções $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} \in L^1(\mu)$ tais que*

$$\lambda_{\min}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) \ \text{ e } \ \lambda_{\max}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x)\|,$$

em μ-quase todo o ponto $x \in X$. Além disso, $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$ são (T, μ)-invariantes,

- $\displaystyle\int \lambda_{\min}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \log m(A^{(n)}(x))\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int \log m(A^{(n)}(x))\, d\mu$ *e*
- $\displaystyle\int \lambda_{\max}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \log \|A^{(n)}(x)\|\, d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int \log \|A^{(n)}(x)\|\, d\mu.$

Este teorema é um corolário do Teorema Ergódico Subaditivo essencialmente pelos motivos da discussão anterior. Devido à *submultiplicatividade* da norma matricial, as sucessões

$$\phi_n(x) = \log \|A^{(n)}(x)\| \quad e \quad \varphi_n(x) = \log \|(A^{(n)}(x))^{-1}\|$$

são ambas subaditivas. A condição de integrabilidade é trivialmente satisfeita em ambos os casos pelo que da relação

$$\log m(A^{(n)}(x)) = -\log \|(A^{(n)}(x))^{-1}\|$$

o resultado segue.

Portanto, o Teorema de Furstenberg-Kesten afirma que a norma e a co-norma dos iterados de ordem elevada admitem tipicamente taxas de variação exponencial precisas

$$\|A^{(n)}(x)\| \approx e^{n\lambda_{\max}(x)} \text{ e } m(A^{(n)}(x)) \approx e^{n\lambda_{\min}(x)}.$$

Retomando por um pouco a motivação do exemplo dos difeomorfismos, nomeadamente para o estudo de $\|Df_x^n \cdot v\|_{f^n(x)}$, temos em geral

$$m(A^{(n)}(x)) \cdot \|v\| \leqslant \|A^{(n)}(x) \cdot v\| \leqslant \|A^{(n)}(x)\| \cdot \|v\|,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^d$, pelo que em termos assintóticos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x)\|.$$

Dado que o Teorema de Furstenberg-Kesten define genericamente os extremos da desigualdade acima, cabe questionar naturalmente um comportamento semelhante para o membro intermédio. A análise desta questão é feita no próximo dos teoremas principais deste capítulo, o *Teorema de Oseledets*. Este refina substancialmente o resultado de Furstenberg-Kesten, ao afirmar que num ponto $x \in X$ típico é possível filtrar/decompor $\mathbb{R}^d$ em subespaços de tal modo que o comportamento da dinâmica restrita a cada um deles está bem caraterizado em termos da linguagem exponencial.

1.2 Teorema de Oseledets

Nesta secção, apresentamos o Teorema de Oseledets, também conhecido por *Teorema Ergódico Multiplicativo*, para os *cociclos lineares* (ou morfismos de fibrados vetoriais). A classe de espaços de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ que consideramos presentemente é a dos *espaços de*

Lebesgue. Esta é uma classe importante em Teoria Ergódica, quer pelas boas propriedades que possui em relação aos demais espaços de probabilidade, quer porque cobre a maior parte dos exemplos de relevo. A menos de isomorfismo mod 0, a noção de equivalência padrão, há vários representantes que poderíamos tomar. O mais conveniente para aqui é aquele em que X representa um espaço métrico compacto e $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{|\mu}$ a σ-álgebra de borelianos completada em relação à probabilidade μ.

Como é usual, consideramos uma transformação mensurável $T : X \to X$ que preserva μ . Seja $\pi : E \to X$ um fibrado vetorial mensurável de dimensão finita munido com uma métrica de Riemann $\| \cdot \|_x$ em cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ dependendo de forma mensurável do ponto de base $x \in X$. Um *cociclo linear* sobre T é um automorfismo (mensurável) de fibrados vetoriais $F : E \to E$ cobrindo T. Isso significa que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

e as ações nas fibras $F_x : E_x \to E_{Tx}$ são isomorfismos lineares de espaços vetoriais que dependem de forma mensurável de x. O próximo exemplo, já abordado, é possivelmente o representante mais intrínseco deste conceito, a sua inspiração.

Exemplo 1.1. *Cociclo dinâmico* ou *cociclo derivado*: consideramos um difeomorfismo $f : M \to M$ de uma variedade diferenciável riemanniana M e a derivada $F = Df$ a atuar no fibrado tangente $E = TM$.

O modelo acima introduzido é bastante abrangente, mas para os nossos propósitos não necessitaremos de trabalhar com tanta generalidade. De facto, na formulação dos resultados teóricos desta secção assumiremos que os fibrados são triviais, ou seja, da forma $E = X \times \mathbb{R}^d$. Citando [39], esta é uma hipótese razoável na medida em que frequentemente a restrição do fibrado a um subconjunto de X com medida total é (isomorfo a) um fibrado trivial: no presente modelo, em que X é um espaço métrico compacto isso sempre acontece (veja-se a Proposição C.1). Nesse caso, cada ação F_x traduz-se num elemento $A(x)$ de $GL(\mathbb{R}, d)$, dependendo de forma mensurável do ponto x, e o cociclo consiste assim dum produto semi-direto, i.e., da forma

$$F(x, v) = (Tx, A(x) \cdot v).$$

Notamos que a ação F_x^n é dada precisamente por $A^{(n)}(x)$ com o significado

$$A^{(n)}(x) := A(T^{n-1}x)A(T^{n-2}x)\cdots A(Tx)A(x).$$

Quando T é invertível, também o é o cociclo F, e podemos considerar os iterados revertendo o tempo $F^{-n}(x,v) = (T^{-n}x, A^{(-n)}(x)\cdot v)$, onde

$$A^{(-n)}(x) := [A(T^{-n}x)]^{-1}\cdots[A(T^{-1}x)]^{-1} = [A^{(n)}(T^{-n}x)]^{-1}.$$

Suporemos também que a métrica de Riemann $\|\cdot\|_x$ é independente da fibra, fixando para o efeito alguma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^d$ e usando o mesmo símbolo para denotar a norma induzida no espaço dos operadores lineares $L:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, como vem sendo hábito. Para uma exposição mais completa destes objetos matemáticos, sugerimos o Apêndice C.

Estamos interessados no estudo da dinâmica gerada pelos cociclos à luz da seguinte

Definição 1.3. Dado um cociclo linear sobre T definimos o *expoente caraterístico de Lyapunov* ou simplesmente o *expoente de Lyapunov* associado ao par $(x,v)\in X\times\mathbb{R}^d$ por

$$\lambda^+(x,v) := \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|A^{(n)}(x)\cdot v\|\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}.$$

Quando T é invertível, definimos também outro *expoente de Lyapunov* revertendo o tempo

$$\lambda^-(x,v) := \limsup_{n\to-\infty}\frac{1}{|n|}\log\|A^{(n)}(x)\cdot v\|\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}.$$

Em ambos os casos, fazemos a convenção $\log(0) = -\infty$.

Interessa-nos especialmente o caso em que os expoentes são realizados como limites, pelo que tudo o que agora se segue deve ser lido nessa ótica. Os *expoentes de Lyapunov* precisam-nos as taxas de variação exponencial assintóticas da norma dos iterados $F_x^n : E_x \to E_{T^n(x)}$. Expoentes positivos ou negativos predizem, respetivamente, crescimento ou decrescimento exponencial da norma, ao passo que expoentes nulos traduzem a falta de comportamento exponencial, por vezes dito na literatura de *subexponencial*. A existência de expoentes de Lyapunov para cociclos é assim um dado importante no estudo da dinâmica, nomeadamente no que toca à expansão, contração e subsequentes questões de estabilidade que motivaram A. Lyapunov a introduzi-los na Teoria das EDO's ([23]). Vamos analisar um exemplo elementar que elucida isso mesmo mas que, num sentido a explanarmos adiante, não pode ser tido como um retrato da situação geral.

Exemplo 1.2. Consideremos um isomorfismo linear $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Observe-se que $Df_x = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ pelo que o cociclo derivado é constante. Sejam $e^{\lambda_1} > e^{\lambda_2} > \cdots > e^{\lambda_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) os valores absolutos distintos dos valores próprios de f e seja E^i a soma direta dos espaços próprios generalizados associados aos valores próprios cujo valor absoluto é e^{λ_i}. Como consequência da forma canónica de Jordan, temos

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v_j)\| = \lambda_j, \text{ para todo } v_j \in E^j \backslash \{0\} \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Assim, expoentes de Lyapunov $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$ existem para todos os pares (x, v). Em particular, se $\lambda_1 < 0$ a origem (e portanto todos os pontos) é assintoticamente exponencialmente estável.

O modelo *espectral* do exemplo acima inspira uma adaptação para transformações mais gerais. Introduzimos agora o que se deve entender por isso através duma noção de *regularidade* que será fruto do Teorema de Oseledets, em linha com [24] e apresentada com uma estrutura mais clássica noutros textos (e.x. [2] e [5] sob o título de *regularidade de Lyapunov*).

Definição 1.4. Um ponto $x \in X$ diz-se *positivamente regular*, se existirem $k = k(x)$ números reais $\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_k(x)$ e uma filtração linear

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > V_x^2 > \cdots > V_x^k > V_x^{k+1} = \{0\} \tag{1.3}$$

tal que, para todo $1 \leqslant j \leqslant k$, se tem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v_i\| = \lambda_i(x), \text{ para todo } v_i \in V_x^i \backslash V_x^{i+1}.$$

Quando o sistema é invertível, seria possível ainda introduzir uma *regularidade negativa* em termos análogos, que não implica nem é implicada pela positiva. Mesmo quando coexistem, os expoentes e a filtração que então se obteriam revertendo o tempo não estão a priori relacionados com os acima definidos. Para gerar uma maior compatibilidade entre a regularidade positiva e a negativa que combine as respetivas filtrações temos a seguinte noção.

Definição 1.5. Dizemos que $x \in X$ é (simplesmente) *regular*, se existirem $k = k(x)$ números reais $\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_k(x)$ e uma decomposição

$$\mathbb{R}^d = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^k \tag{1.4}$$

tal que, para todo $1 \leqslant j \leqslant k$, vale

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v_i\| = \lambda_i(x), \text{ para todo } v_i \in E_x^i \backslash \{0\}.$$

Quando existem, as filtrações-decomposições em (1.3) e (1.4) e os expoentes de Lyapunov são únicos. Adotaremos a notação $\mathcal{R}^+(T)$ e $\mathcal{R}(T)$ para designarmos o conjunto dos pontos positivamente regulares e simplesmente regulares (quando aplicável) de T, respetivamente. Convém observar que quando T é invertível tem-se $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}^+(T)$ com $V_x^i = \oplus_{j=i}^k E_x^j$. Os espaços V_x^i e E_x^i dizem-se os *espaços de Oseledets*, nomenclatura que transita para as respetivas filtrações/decomposições. Define-se a *multiplicidade* do expoente de Lyapunov $\lambda_i(x)$ por

$$k_x^i = \dim V_x^i - \dim V_x^{i+1}$$

de modo que o *espectro* de Lyapunov em x é o conjunto dos expoentes de Lyapunov em x contados com a sua multiplicidade

$$\mathcal{S}_x := \{(\lambda_i(x), k_x^i) \,:\, i = 1, ..., k(x)\}.$$

Note-se que quando $x \in \mathcal{R}(T)$, $V_x^i = E_x^i \oplus V_x^{i+1}$ e portanto a multiplicidade dos expoentes $\lambda_i(x)$ coincide com a respetiva dimensão dos subespaços de Oseledets E_x^i. Os conjuntos $\mathcal{R}^+(T)$ e $\mathcal{R}(T)$ são T-invariantes: se x é regular, então Tx é regular e tem-se

$$k(Tx) = k(x), \;\; \lambda_i(Tx) = \lambda_i(x), \;\; A(x) \cdot V_x^i = V_{Tx}^i \;\; e \;\; A(x) \cdot E_x^i = E_{Tx}^i.$$

No Exemplo 1.2, vemos que *todos* os pontos são regulares e, além disso, que os expoentes de Lyapunov não dependem de x. Com a mesma abordagem, vemos que a regularidade é uma característica de pontos periódicos mas em geral é difícil verificar se um determinado ponto é ou não regular. Assim, é legítimo questionarmo-nos sobre o *tamanho* de $\mathcal{R}^+(T)$ e $\mathcal{R}(T)$. Há duas maneiras clássicas de abordar esta questão, sempre que façam sentido: uma pela via topológica e outra pela via da medida, não coincidentes normalmente. Citando [24] ou [37], situações como a do Exemplo 1.2 são muito especiais, acontecendo somente para aplicações particulares. Nos mesmos textos se refere que, no exemplo do cociclo dinâmico, pontos *regulares* formam frequentemente um conjunto de primeira categoria de Baire (até mesmo finito) e portanto um conjunto magro segundo essa perspetiva. A resposta pela via da medida é o conteúdo do Teorema de Oseledets. Este afirma que, sob uma condição de integrabilidade razoável, a situação é precisamente a oposta: pontos regulares formam um conjunto de probabilidade total. Vamos apresentar duas versões deste teorema: a primeira, mais fraca, é para transformações gerais do espaço de probabilidade, referente à regularidade positiva $\mathcal{R}^+(T)$, a que chamaremos por esse motivo *versão unilateral*; uma segunda, para transformações invertíveis e a regularidade em $\mathcal{R}(T)$, que por analogia se designará *versão bilateral*. Suporemos também que o sistema é ergódico. Usando a *decomposição ergódica* e alguns cuidados técnicos extra no tratamento das questões de mensurabilidade, seria possível demonstrar versões não ergódicas das que em seguida enunciamos. A ergodicidade simplificará um pouco a argumentação sem com isso esconder o aspeto e as dificuldades essenciais do teorema.

Teorema B. (Oseledets) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade de Lebesgue e T uma transformação ergódica de X. Seja $A : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ uma aplicação mensurável satisfazendo $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$. Nestas condições, existem números reais $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$ e, em μ-quase todo o ponto $x \in X$, há uma única filtração linear*

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > V_x^2 > \cdots > V_x^k > V_x^{k+1} = \{0\}$$

tal que, para todo $1 \leqslant i \leqslant k$, se tem

1. $A(x) \cdot V_x^i = V_{Tx}^i$ *e*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v_i\| = \lambda_i(x) \Leftrightarrow v_i \in V_x^i \backslash V_x^{i+1}$.

Além disso, os espaços V_x^i dependem de forma mensurável do ponto x do espaço.

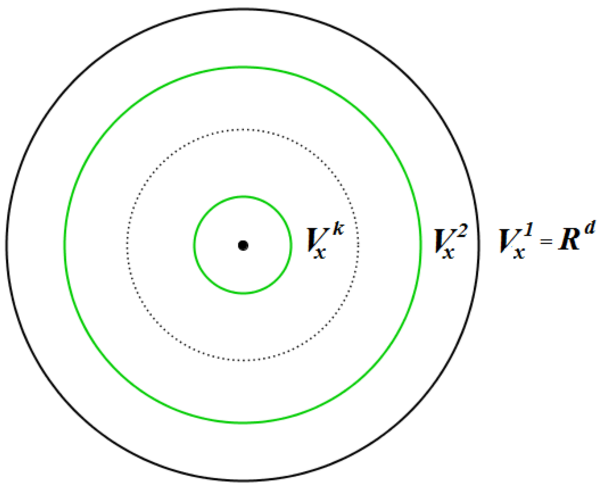

Figura 1.1: FILTRAÇÃO DE OSELEDETS

A dependência mensurável dos espaços de Oseledets, geralmente não contínua, é um ponto delicado que remetemos para o Capítulo 3. A versão bilateral tem conclusões substancialmente mais fortes. Esta é talvez aquela a que se associa mais frequentemente o resultado de Oseledets, e fornece algo mais do que a regularidade tal como foi introduzida na Definição 1.4.

Teorema C. (Oseledets) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade de Lebesgue e T uma transformação ergódica invertível e bimensurável de X. Seja $A : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ uma aplicação mensurável satisfazendo $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$. Então existem números reais $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$ e, em μ-quase todo o ponto $x \in X$, há uma única decomposição*

$$\mathbb{R}^d = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^k$$

tal que, para todo $1 \leqslant i \leqslant k$, se tem

1. $A(x) \cdot E_x^i = E_{Tx}^i$ *e* $V_x^i = \oplus_{j=i}^k E_x^j$,
2. $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v_i\| = \lambda_i(x) \Leftrightarrow v_i \in E_x^i \backslash \{0\}$ *e*
3. $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \sin \sphericalangle(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} E_{T^n x}^i, \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} E_{T^n x}^j) = 0$, *sempre que* $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \varnothing$.

Além disso, os espaços E_x^i dependem de forma mensurável do ponto x do espaço.

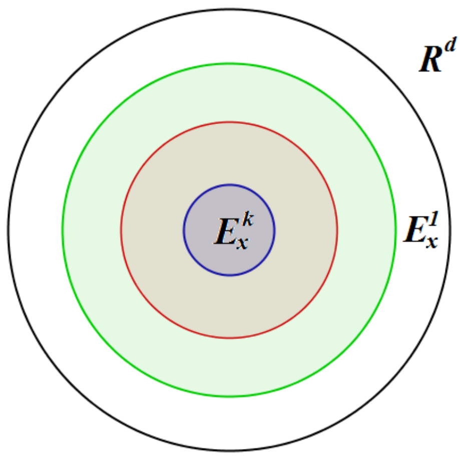

Figura 1.2: DECOMPOSIÇÃO DE OSELEDETS

As decomposições de Oseledets têm uma estrutura muito rica com mais propriedades do que as que surgem no teorema. Em primeiro lugar, os espaços de Oseledets E^i_x têm dimensão constante $1 \leqslant d_i \leqslant d$ (q.t.p.), o que acontece também na versão unilateral. A convergência em 2 é uniforme sobre a bola unitária $B^i_x := \{v_i \in E^i_x \,:\, \|v_i\| = 1\}$. Isso pode ser expresso em termos da norma e da conorma restritas por

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}_{|E^i_x}(x)\| = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}_{|E^i_x}(x)) = \lambda_i.$$

O comportamento da norma e conorma (globais) é dado pelo Teorema de Furstenberg-Kesten. De facto, os expoentes $\lambda_{\max}(x)$ e $\lambda_{\min}(x)$ que este fornece correspondem respetivamente aos expoentes *extremais* $\lambda_1(x)$ e $\lambda_k(x)$, mais precisamente,

$$\lambda_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x)\| = \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) \text{ e}$$

$$\lambda_k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) = \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x)\|.$$

Diretamente relacionada com o ponto 3, há ainda uma outra propriedade que envolve detemi-nantes. Concretamente, pondo $D_x = \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} E^j_x$ tem-se

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |\det(A^{(n)}(x)_{|D_x})| = \sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j \dim E^j_x = \sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j d_j.$$

A título informativo, referimos que a fórmula acima tem conexões com a entropia do sistema, se tomada sobre os expoentes positivos (bastará mencionar a *fórmula de Pesin* [30] e a *desigualdade de Ruelle* [32]) e costuma ser introduzida na noção de regularidade (de Lyapunov) clássica como dissemos, embora isso seja algo que este trabalho não pretende aprofundar.

Em ambas as versões, notamos que a satisfação da condição de integrabilidade, os expoentes de Lyapunov, o seu número e os subespaços de Oseledets, não são afetados se substituirmos a métrica de Riemann $\|\cdot\|_x$ fixada (neste caso, a partir da norma em $\mathbb{R}^d$) por qualquer outra métrica de Riemann $\|\cdot\|^*_x$ equivalente no sentido em que existe $c \in L^1(\mu)$ tal que

$$e^{-c(x)}\|v\|_x \leqslant \|v\|^*_x \leqslant e^{c(x)}\|v\|_x, \text{ para } \mu\text{-q.t.p. } x \in X \text{ e todo } v \in E_x.$$

Como é bem sabido, métricas de Riemann independentes de x pertencem à mesma classe e por isso os objetos do (e o) teorema não dependem da norma escolhida em $\mathbb{R}^d$.

Para concluir esta apresentação, referimos que o Teorema de Oseledets é válido ainda em contextos mais gerais mencionados na introdução: como dissemos, é válido para medidas invariantes não necessariamente ergódicas, caso em que os expoentes, o seu número e multiplicidades se tornariam funções mensuráveis em x definidas q.t.p.; é válido para espaços de probabilidade gerais e ainda para fibrados não triviais; há também versões para fluxos (tempo contínuo): aconselhamos [2] para um tratamento completo. Uma abordagem mais ambiciosa e aprofundada requereria uma incursão nas técnicas da álgebra exterior (potências exteriores, valores singulares, etc.), o que está para além dos objetivos desta dissertação.

Capítulo 2

Teorema Ergódico Subaditivo

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema de Kingman. Começamos por dar uma breve explicação do esquema da prova para facilitar a leitura, seguida de diversas secções que pensamos conter os *pontos-chave* da mesma, incluindo breves comentários sobre os lugares paralelos na literatura. Para além do texto original de A. Ávila e J. Bochi ([3], 2009), acompanhamos de perto os textos de M. Viana ([38], 2010) e ([27], 2013).

2.1 Estrutura da prova

Recordamos que uma sucessão subaditiva de funções mensuráveis $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ para um transformação mensurável $T : X \to X$ que preserva a probabilidade μ tem um limite importante associado

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \phi_n \, d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int \phi_n \, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

sob a hipótese de integrabilidade $\phi_1^+ \in L^1(\mu)$. O Teorema de Kingman [A] diz que para uma tal sucessão, o limite

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n(x)}{n}$$

existe em quase todo o ponto e que em média é igual a L. Para analisarmos a existência e o comportamento de ϕ num conjunto de probabilidade total vamos começar por definir as funções mensuráveis $\phi_-, \phi_+ : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ por

$$\phi_-(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\phi_n(x)}{n} \quad \text{e} \quad \phi_+(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_n(x)}{n}.$$

É facto elementar de análise que $\phi(x)$ existe (podendo eventualmente ser infinito) se e somente se $\phi_-(x) = \phi_+(x)$, caso em que $\phi_-(x) = \phi(x) = \phi_+(x)$. Posto isto, demonstraremos antes a coincidência $\phi_- = \phi_+$ em quase todo o ponto. Claramente, $\phi_- \leqslant \phi_+$, relação que permanece inalterada tomando os integrais, $\int \phi_- \, d\mu \leqslant \int \phi_+ \, d\mu$. A ideia da prova consiste em demonstrar as seguintes desigualdades *invertidas*

$$\int \phi_+ \, d\mu \leqslant L \leqslant \int \phi_- \, d\mu.$$

Isto implica não só $\int \phi_- \, d\mu = \int \phi_+ \, d\mu$ e portanto $\phi_- = \phi_+$ em quase todo o ponto, como também que a média de ambas é L, o que prova o teorema. Como veremos, a desigualdade do lado direito - na verdade, provaremos mesmo a igualdade - é a mais importante, de tal modo que a do lado esquerdo é uma consequência desta, um ingrediente possivelmente inovador desta prova. Numa primeira fase, assumiremos que as funções satisfazem uma certa hipótese de limitação inferior, que será removida *a posteriori* através de um método de truncagem, num contexto que ficará claro no correr da demonstração. De resto, a abordagem de mostrar as desigualdades invertidas está já presente, por exemplo, em [14] e [18], sendo uma ideia algo padrão, mas engenhosa.

2.2 Lema de Fekete

Por uma questão de completude do trabalho, incluímos aqui uma demonstração do Lema de Fekete que pode ser encontrada de forma semelhante em diversos textos (por exemplo, [27]).

Lema 2.1. (Fekete) *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão subaditiva, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \in [-\infty, a_1].$$

Prova: A essência e dificuldade do lema restringem-se a sucessões reais: de facto, se $a_k = -\infty$ para algum k, então a subaditividade implica que

$$a_l \leqslant a_{l-k} + a_k = -\infty, \text{ para todo } l > k,$$

pelo que a igualdade é trivialmente satisfeita (é $-\infty$ em ambos os lados). Cingimo-nos portanto ao caso em que $a_n \in \mathbb{R}$, para todo o natural n. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, aplicamos um algoritmo da divisão modificado a n e k, obtendo uma escrita única $n = q_n k + r_n$, onde $q_n \in \mathbb{N}_0$ é o quociente e $r_n \in \{1, \ldots, k\}$ o resto (no algoritmo tradicional, o resto toma o valor 0 em vez de k, mas isto é apenas uma conveniência para o que se segue, resultante de excluirmos o zero da nossa definição de número natural). Usando a subaditividade de acordo com esta escrita retira-se que

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_{q_n k} + a_{r_n}}{q_n k + r_n} \leqslant \frac{q_n a_k + a_{r_n}}{q_n k + r_n}. \tag{2.1}$$

Uma vez fixado k, r_n fica limitado, donde se deduz que $q_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. É igualmente verdade que a_{r_n} fica também limitado, pois toma apenas um número finito de valores. Logo tomando o limite superior em ambos os membros de (2.1) obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_k}{k}.$$

Isto vale para todo o $k \in \mathbb{N}$. Assim, esta relação permite concluir

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{k} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n},$$

o que finaliza a prova, tendo em conta a relação entre os limites inferior e superior. □

Nota 2.1. *O Lema de Fekete, tal como o próprio Teorema de Kingman, tem também uma versão para sucessões $(a_n)_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$* ***superaditivas****, i.e., tais que*

$$a_{m+n} \geqslant a_m + a_n, \quad \textit{para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \in [a_1, \infty].$$

Basta para o efeito tomar a sucessão simétrica $(-a_n)_n$ e aplicar o Lema de Fekete (subaditivo), um truque que ocorrerá algumas vezes neste texto.

2.3 Invariância

Uma vez explicado o esquema da demonstração, vamos analisar a (T, μ)-invariância de ϕ expressa no item 1 do teorema. Para tal, usaremos o seguinte resultado elementar de Teoria Ergódica, cuja prova optamos por incluir.

Lema 2.2. *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $T : X \to X$ *uma transformação mensurável que preserva* μ*. Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *é uma função mensurável tal que* $f \circ T(x) \geqslant f(x)$ *para todo* $x \in X$*, então* $f \circ T = f$ *em* μ*-quase todo o ponto.*

Prova: Dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, seja $\mathcal{C}_a = \{x \in X \,:\, f(x) \geqslant a\}$. Por hipótese,

$$\mathcal{C}_a \subset T^{-1}(\mathcal{C}_a) = \{x \in X \,:\, f \circ T(x) \geqslant a\}.$$

Como T preserva μ, temos $\mu(\mathcal{C}_a) = \mu(T^{-1}(\mathcal{C}_a))$ donde se retira que $\mu(T^{-1}(\mathcal{C}_a)\backslash\mathcal{C}_a) = 0$. Observe-se que $T^{-1}(\mathcal{C}_a)\backslash\mathcal{C}_a = \{x \in X \,:\, f(x) < a \leqslant f \circ T(x)\}$. Consideremos o conjunto $A = \{x \in X \,:\, f(x) < f \circ T(x)\}$. Queremos verificar que $\mu(A) = 0$ e, para tal, tomemos uma enumeração dos racionais $\{r_n\}_n$ e definamos, para cada natural n, $A_n = \{x \in X \,:\, f(x) < r_n \leqslant f \circ T(x)\}$. Pelo que foi visto, $\mu(A_n) = 0$ e portanto, $\mu(A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$, como queríamos mostrar. □

Usando a subaditividade da sucessão de funções $(\phi_n)_n$, temos

$$\phi_- := \liminf_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\phi_1 + \phi_{n-1} \circ T}{n} = \phi_- \circ T.$$

Decorre do lema anterior que $\phi_- \circ T = \phi_-$ em μ-quase todo o ponto, valendo considerações análogas para ϕ_+. Logo, a função ϕ descrita acima é (T, μ)-invariante. De facto, podemos apurar um pouco mais este resultado. Mais geralmente, para cada $j \in \mathbb{N}$, vale

$$\phi_-(x) \leqslant \phi_- \circ T^j(x),$$

pelo que $\phi_- = \phi_- \circ T^j$ em μ-quase todo o ponto (note-se que T^j preserva μ quando o mesmo sucede para T). Uma vez que a interseção numerável de conjuntos com probabilidade total tem ainda probabilidade total, o conjunto

$$I = \{x \in X \,:\, \phi_-(x) = \phi_- \circ T^j(x), \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\}$$

tem também probabilidade total. Dito de outro modo, $\phi = \phi_-$ é constante ao longo das órbitas por T de quase todos os pontos.

2.4 Resultado principal

Vamos apresentar o resultado que é considerado pelos autores de [3] como o *coração da prova*, ou seja, o seu ingrediente fundamental, visível já em [36]. Ele servirá, em primeiro lugar, para provar a (des)igualdade $L \leqslant \int \phi_- \, d\mu$ e, por consequência, também $\int \phi_+ \, d\mu \leqslant L$.

Hipótese de limitação. Vamos assumir inicialmente que a sucessão $(\phi_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente limitada inferiormente, i.e., existe um número real $c > 0$ tal que

$$\frac{\phi_n}{n} \geqslant -c\,, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Isto implica em particular que $\phi_- \geqslant -c$. Esta hipótese será mantida na demonstração de ambas as desigualdades invertidas e do resultado principal para a seu tempo ser removida por um processo de truncagem.

Considerações iniciais. Antes disso, vamos introduzir alguma notação conveniente. Dado $\epsilon > 0$, considere-se a sucessão de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

$$E_k := \{x \in X \; : \; \frac{\phi_j(x)}{j} \leqslant \phi_-(x) + \epsilon, \text{ para algum } j \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Trata-se de uma sucessão monótona crescente, ou seja, $E_k \subset E_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe-se que cada $x \in X$ pertence a E_k para todo k suficientemente grande (veja-se a definição de ϕ_-, que neste caso não toma o valor $-\infty$), pelo que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Logo

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \mu(X) = 1.$$

Vamos definir também a sucessão de funções $\psi_k : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \phi_-(x) + \epsilon, & \text{se } \; x \in E_k \\ \phi_1(x), & \text{se } \; x \notin E_k \end{cases}.$$

Uma vez que se $x \notin E_k$ por definição $\phi_1(x) > \phi_-(x) + \epsilon$, temos em geral a desigualdade $\psi_k \geqslant \phi_- + \epsilon$, para todo o natural k.

O resultado. A estimativa fundamental desta prova, a que nos referimos há pouco, consiste no seguinte:

Lema 2.3. *Para μ-quase todo o $x \in X$ e todos os naturais $n > k$,*

$$\phi_n(x) \leqslant \sum_{i=0}^{n-k-1} \psi_k(T^i x) + \sum_{i=n-k}^{n-1} \max\{\psi_k, \phi_1\}(T^i x). \tag{2.3}$$

Prova: Começamos por observar que o conjunto de probabilidade total a considerar em que vale a estimativa acima é precisamente o conjunto I dos pontos $x \in X$ em cujas órbitas ϕ_- é constante (que um tal conjunto tem probabilidade total, foi explicado anteriormente). Para ver isso, seja $x \in I$ arbitrário. Vamos associar a x um sucessão de inteiros

$$m_0 \leqslant n_1 < m_1 \leqslant n_2 < m_2 \leqslant \cdots$$

construída indutivamente da seguinte maneira: $m_0 = 0$ (condição inicial) e, em geral, uma vez construído m_{j-1}, definimos n_j como o menor inteiro maior ou igual a m_{j-1} tal que $T^{n_j} \in E_k$. Notamos que tal inteiro pode não existir, caso em que o processo pára e a sucessão é finita. De outro modo, caso exista, então há algum $s_j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que

$$\frac{\phi_{s_j}(T^{n_j} x)}{s_j} \leqslant \phi_-(x) + \epsilon \tag{2.4}$$

simplesmente por definição de E_k. Definimos $m_j = n_j + s_j$, o que permite agora continuar o processo. Com isto fica explicada a construção. Convém subinhar que se $m_{j-1} \leqslant i < n_j$, então por construção $T^i x \notin E_k$, nada se podendo inferir de análogo para $n_j \leqslant i < m_j$. No entanto, no que se seguirá teremos bem presente a distinção entre o comportamento de T nestes dois tipos de intervalos de tempo para a avaliação das funções ao longo da órbita de x.

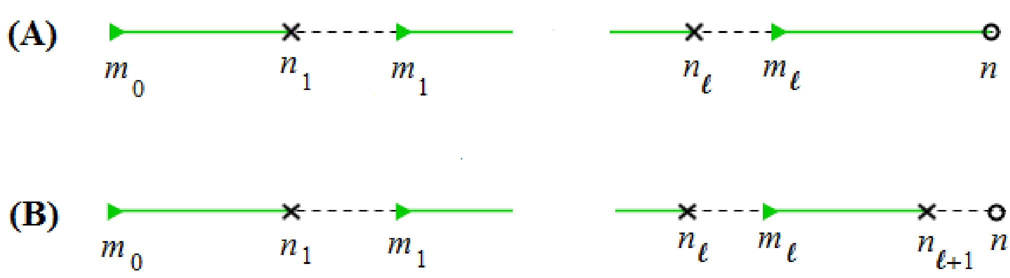

Figura 2.1: DECOMPOSIÇÃO DA ÓRBITA

Para $n > k$, seja l o maior inteiro tal que $m_l \leqslant n$. Não podemos *a priori* comparar n_{l+1} com n (ver Figura 2.1), mas sabemos certamente por construção que $n_{l+1} + k > n$, pois de outro modo haveria uma contradição com a definição de m_l. Numa primeira tentativa de obter a estimativa (2.3), vamos usar a subaditividade de $(\phi_n)_n$ de acordo com a decomposição $n = (n - m_l) + (m_l - n_l) + (n_l - m_{l-1}) + \cdots + (n_1 - m_0)$, obtendo assim

$$\phi_n(x) \leqslant \phi_{n-m_l}(T^{m_l}(x)) + \sum_{j=1}^{l} \phi_{n_j - m_{j-1}}(T^{m_{j-1}}(x)) + \sum_{j=1}^{l} \phi_{m_j - n_j}(T^{n_j}(x)). \tag{2.5}$$

Para majorarmos a primeira parcela e as parcelas do primeiro somatório no lado direito desta desigualdade, usamos outra vez a subaditividade, de modo que

$$\phi_{n_j - m_{j-1}}(T^{m_{j-1}}(x)) \leqslant \sum_{i=m_{j-1}}^{n_j - 1} \phi_1(T^i(x)),$$

para todo $j = 1, \ldots, l$, mantendo-se uma desigualdade em termos inteiramente análogos para $\phi_{n-m_l}(T^{m_l}(x))$. Desta feita, (2.5) transforma-se em

$$\phi_n(x) \leqslant \sum_{i \in \mathcal{I}} \phi_1(T^i(x)) + \sum_{j=1}^{l} \phi_{m_j - n_j}(T^{n_j}(x)), \tag{2.6}$$

onde $\mathcal{I} = \bigcup_{j=1}^{l} [m_{j-1}, n_j) \cup [m_l, n)$ (usamos a notação $[a, b)$ para designar o conjunto dos inteiros z tais que $a \leqslant z < b$). Para majorarmos as parcelas do último somatório em (2.5), vamos usar a relação (2.4) (reescrevendo $s_j = m_j - n_j$), a constância de ϕ_- ao longo da órbita de x e o facto de $\psi_k(x) \geqslant \phi_-(x) + \epsilon$. Isto fornece, respetivamente, o seguinte

$$\phi_{m_j - n_j}(T^{n_j}(x)) \leqslant \sum_{i=n_j}^{m_j - 1} (\phi_-(T^i(x) + \epsilon) \leqslant \sum_{i=n_j}^{m_j - 1} \psi_k(T^i(x)).$$

Cada uma das parcelas $\phi_1(T^i(x))$ do primeiro somatório em (2.6), mais precisamente aquelas em que $i \in \bigcup_{j=1}^{l} [m_{j-1}, n_j) \cup [m_l, \min\{n_{l+1}, n\})$, é igual respetivamente a $\psi_k(T^i(x))$, porque $T^i(x) \notin E_k$ nesses casos. Juntamente com esta última majoração, podemos agora obter a partir de (2.6)

$$\phi_n(x) \leqslant \sum_{i=0}^{\min\{n_{l+1}, n\} - 1} \psi_k(T^i(x)) + \sum_{i=n_{l+1}}^{n-1} \phi_1(T^i(x)).$$

Como $n_{l+1} > n - k$ por construção e $\max\{\psi_k, \phi_1\}(x) \geqslant \phi_1(x)$ por definição, a prova da estimativa principal (2.3) está concluída. □

2.5 Igualdade *inferior*

Neste ponto, vamos provar aquilo a que chamamos *igualdade inferior*, por analogia com o conceito de limite inferior nela envolvido. Aqui surgem os métodos de truncagem, ideias também presentes em [18] e [36]. Em concreto,

Lema 2.4. *Sob as hipóteses do Teorema de Kingman [A], temos*

$$\int \phi_- \, d\mu = L. \tag{2.7}$$

Prova: Numa primeira instância, mantemos a hipótese de limitação uniforme das funções expressa em (2.2). Começamos por observar que, nessas condições, ϕ_- é integrável e vale $\int \phi_- \, d\mu \leqslant L$. Com efeito, pelo Lema de Fatou [A.3], aplicado à sucessão de funções não negativas $(\phi_n/n + c)_{n\in\mathbb{N}}$, temos precisamente

$$\int \phi_- + c \; d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \frac{\phi_n}{n} + c \, d\mu = L + c.$$

No sentido de provarmos a desigualdade mais importante $\int \phi_- \, d\mu \geqslant L$, para daí concluirmos (2.7) neste caso, vamos usar o resultado principal. Integrando a desigualdade (2.3), e dividindo por n, decorre

$$\frac{1}{n} \int \phi_n \, d\mu \leqslant \frac{n-k}{n} \int \psi_k \, d\mu + \frac{k}{n} \int \max\{\psi_k, \phi_1\} \, d\mu.$$

A partir deste ponto jogamos com a informação assintótica. Fixado k e tomando o limite quando $n \to \infty$ em ambos os lados da inequação, obtemos $L \leqslant \int \psi_k \, d\mu$. Observe-se que

$$\int \psi_k \, d\mu = \int_{E_k} \psi_k \, d\mu + \int_{X\setminus E_k} \psi_k \, d\mu = \int_{E_k} \phi_- + \epsilon \, d\mu + \int_{X\setminus E_k} \phi_1 \, d\mu.$$

Logo, quando $k \to \infty$ obtemos $L \leqslant \int \phi_- + \epsilon \, d\mu = \int \phi_- \, d\mu + \epsilon$ (recordem-se as propriedades da sucessão $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$). Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos finalmente que $L \leqslant \int \phi_- \, d\mu$. Isto prova (2.7), sob a hipótese de limitação uniforme.

Demonstremos agora o caso geral (i.e., sem a hipótese de limitação). Com esse intuito, usaremos um método de truncagem considerando, para cada $c > 0$, as funções

$$\phi_n^c = \max\{\phi_n, -cn\} \;\text{ e }\; \phi_-^c = \max\{\phi_-, -c\}. \tag{2.8}$$

Por definição, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\phi_n^c/n \geqslant -c$. Além disso a sucessão de funções $(\phi_n^c)_n$ é subaditiva e tem-se $\phi_-^c = \liminf_{n\to\infty} \phi_n^c/n$. Usando o que já provamos para o caso da limitação uniforme,

$$\int \phi_-^c \, d\mu = L_c := \inf_n \frac{1}{n} \int \phi_n^c \, d\mu.$$

Note-se que $c \leqslant c'$ implica $\phi_n^c \geqslant \phi_n^{c'}$ e também $\phi_-^c \geqslant \phi_-^{c'}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, obtemos uma sucessão monótona de funções

$$\phi_n^1 \geqslant \phi_n^2 \geqslant \cdots \geqslant \phi_n^j \geqslant \cdots$$

tal que $\lim_j \phi_n^j = \phi_n$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona [A.4],

$$\int \phi_n \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int \phi_n^j \, d\mu = \inf_j \int \phi_n^j \, d\mu = \inf_{c>0} \int \phi_n^c \, d\mu,$$

obtendo analogamente $\int \phi_- \, d\mu = \inf_{c>0} \int \phi_-^c \, d\mu$. Para concluir, juntamos estas observações numa só, o que fornece

$$\int \phi_- \, d\mu = \inf_{c>0} \int \phi_-^c \, d\mu = \inf_{c>0} \inf_n \frac{1}{n} \int \phi_n^c \, d\mu = \inf_n \inf_{c>0} \frac{1}{n} \int \phi_n^c \, d\mu = \inf_n \frac{1}{n} \int \phi_n \, d\mu = L.$$

Isto conclui a demonstração. □

Nota 2.2. *Observamos, tal como o é feito em [3], que a igualdade inferior $\int \phi_- \, d\mu = L$, por si só, já implica o Teorema Ergódico de Birkhoff. Este fenómeno deve-se ao facto da sucessão simétrica das somas de Birkhoff*

$$-\phi_n = -\sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ T^j$$

ser também aditiva, e portanto subaditiva, pelo que aplicando a igualdade inferior a esta sucessão se deduz

$$\int -\limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{n} \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} -\frac{\phi_n}{n} \, d\mu = -L \Leftrightarrow \int \phi_+ \, d\mu = L$$

de onde decorre $\phi_- = \phi_+$ em μ-quase todo o ponto. Esta 'simetria da aditividade' não vale em geral para sucessões subaditivas: de facto, as sucessões aditivas são precisamente aquelas para as quais a própria sucessão e a sucessão simétrica são subaditivas.

2.6 Desigualdade *superior*

À semelhança do que fizemos na secção anterior, vamos provar a seguinte desigualdade *superior*, que envolve agora o limite superior. É neste ponto que a prova se revela possivelmente inovadora, usando para o efeito a *igualdade inferior* já obtida e explorando somas de Birkhoff convenientes de modo que a subaditividade não é afetada pela passagem ao simétrico.

Lema 2.5. *Sob as hipóteses do Teorema de Kingman e de limitação em* (2.2)*, temos*

$$\int \phi_+ \, d\mu \leqslant L. \tag{2.9}$$

Começamos por introduzir dois resultados técnicos auxiliares: o primeiro deles é um facto standard de Teoria Ergódica que servirá para provar o segundo, mais relevante dentro deste contexto.

Proposição 2.1. *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva μ. Então, para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\phi \circ T^n(x) = 0, \quad \textit{para } \mu\textit{-q.t.p. } x \in X. \tag{2.10}$$

Podemos obter este resultado como consequência imediata do Teorema Ergódico de Birkhoff aplicado a $\psi = \phi \circ T - \phi$. Uma vez prentendendo obter uma prova do Teorema Ergódico Subaditivo completamente independente deste, usaremos antes o *Lema de Borel-Cantelli* [A.1].

Prova da Proposição 2.1: É necessário e suficiente mostrar que, para cada $\epsilon > 0$ fixado,

$$A_\epsilon := \{x \in X \,:\, |\phi(T^n x)| \geqslant \epsilon n \text{ para infinitos valores de } n \in \mathbb{N}\}$$

tem probabilidade zero. Assim, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\frac{1}{i}}$ tem também probabilidade zero, e é claro que qualquer $x \in X \backslash A = \bigcap_{i=1}^{\infty}(X \backslash A_{\frac{1}{i}})$ satisfaz (2.10): se $x \in X \backslash A_\epsilon$, então $|\phi(T^n(x))|/n < \epsilon$ para todo n suficientemente grande, por definição.

No sentido de provar o que nos propomos, começamos por observar que

$$\mu(\{x \in X \,:\, |\phi(T^n(x))| \geqslant \epsilon n\} = \mu(\{x \in X \,:\, |\phi(x)| \geqslant \epsilon n\} = \mu(\{x \in X \,:\, \epsilon^{-1}|\phi(x)| \geqslant n\}$$

simplesmente porque T preserva μ. Usando o critério de integrabilidade [A.6], juntamente com a hipótese de $\phi \in L^1(\mu)$, decorre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X \,:\, |\phi(T^n(x))| \geqslant \epsilon n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X \,:\, \epsilon^{-1}|\phi(x)| \geqslant n\} \leqslant \epsilon^{-1} \int |\phi| \, d\mu < \infty.$$

Aplicando o Lema de Borel-Cantelli, obtemos imediatamente $\mu(A_\epsilon) = 0$. □

Lema 2.6. *Para qualquer número natural k fixado,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_{kn}}{kn} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{n} \quad \mu\text{-q.t.p..}$$

Prova: Começamos por observar que a desigualdade '$\leqslant$' é imediata pois $(\phi_{kn}/kn)_n$ é uma subsucessão de $(\phi_n/n)_n$.

No sentido de provarmos a desigualdade '$\geqslant$', para cada $n \in \mathbb{N}$ escrevemos $n = kq_n + r_n$, onde $q_n \in \mathbb{N}_0$ e $r_n \in \{1, \ldots, k\}$. Uma vez que r_n está limitado por k (que está fixado) temos $q_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Assim, da relação $n/q_n = k + r_n/q_n$ obtemos então $n/q_n \to k$ quando $n \to \infty$. Por subaditividade,

$$\phi_n \leqslant \phi_{kq_n} + \phi_{r_n} \circ T^{kq_n} \leqslant \phi_{kq_n} + \psi \circ T^{kq_n} \tag{2.11}$$

onde $\psi = \max\{\phi_1^+, \ldots, \phi_k^+\} \geqslant \max\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$. Note-se que $\psi \in L^1(\mu)$, pelo que podemos aplicar o Lema 2.1 para concluir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi \circ T^{kq_n}}{n} = 0 \quad \mu\text{-q.t.p..}$$

No conjunto de probabilidade total onde vale a igualdade acima, dividimos (2.11) por n e tomamos o limite superior:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_{kq_n}}{n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{\psi \circ T^{kq_n}}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_{kq_n}}{n}.$$

Uma vez que $\frac{\phi_{kq_n}}{n} = \frac{q_n}{n} \cdot \frac{\phi_{kq_n}}{q_n}$ e $\lim_n q_n/n = 1/k$, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_{kq_n}}{n} = \limsup_{q\to\infty} \frac{\phi_{kq}}{kq}.$$

Juntando estas duas últimas conclusões, a prova fica concluída. □

Nota 2.3. *Usando o Teorema de Birkhoff, podemos demonstrar alternativamente o Lema 2.6 da seguinte maneira: escrevendo $\phi_n = \phi_n' + \psi_n$ onde $\phi_n' := \phi_n - \sum_{j=0}^{n-1} \phi_1 \circ T^j$, obtemos ϕ_n como soma de um processo subaditivo não-positivo ϕ_n', e um processo aditivo $\psi_n = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_1 \circ T^j$. Segue da subaditividade que ϕ_n' é monótona decrescente em n e portanto a igualdade do Lema 2.6 para ϕ_n' é válida em todos os pontos. Quanto a ψ_n, esta decorre do Teorema de Birkhoff. Esta ideia de decomposição esteve presente nos trabalhos originais de Kingman.*

Prova do Lema 2.5: Para cada natural k fixado, considerem-se as *somas temporais de Birkhoff* de $-\phi_k$ com respeito a T^k, i.e., as funções

$$\Phi_{k,n} = -\sum_{j=0}^{n-1} \phi_k \circ T^{jk}.$$

Como foi analisado anteriormente, $(\Phi_{k,n})_n$ é uma sucessão (sub)aditiva de funções mensuráveis com respeito a T^k. Uma vez que $\Phi_{k,1} = -\phi_k \leqslant c \cdot k < \infty$, pela hipótese de limitação, temos que $\Phi_{k,1}^+$ é limitada, logo integrável. Definindo $\Phi_{k,-} := \liminf_{n\to\infty} \Phi_{k,n}/n$, decorre do Lema 2.4 para estas funções que

$$\int \Phi_{k,-}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \Phi_{k,n}\, d\mu.$$

Uma vez que T^k preserva μ, temos também

$$\int \Phi_{k,n}\, d\mu = -n \int \phi_k\, d\mu \Leftrightarrow \frac{1}{n} \int \Phi_{k,n}\, d\mu = -\int \phi_k\, d\mu.$$

Logo, estas duas igualdades fornecem uma terceira: $\int -\Phi_{k,-}\, d\mu = \int \phi_k\, d\mu$. Por outro lado, observando que a subaditividade de $(\phi_n)_n$ implica $\phi_{kn} \leqslant -\Phi_{k,n}$ e usando o Lema 2.6,

$$k\phi_+ := k \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_{kn}}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} -\frac{\Phi_{k,n}}{n} = -\Phi_{k,-} \quad \mu\text{-q.t.p..}$$

Integrando, tem-se $k \int \phi_+\, d\mu \leqslant \int -\Phi_{k,-}\, d\mu = \int \phi_k\, d\mu$, ou seja,

$$\int \phi_+\, d\mu \leqslant \frac{1}{k} \int \phi_k\, d\mu.$$

Isto vale para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Tomando o ínfimo em k, temos $\int \phi_+\, d\mu \leqslant L$. □

Nota 2.4. *Não seria necessária uma hipótese de limitação uniforme tão forte: bastaria apenas que cada função ϕ_n estivesse limitada por baixo, i.e.,*

$$\inf_{x\in X} \phi_n(x) > -\infty, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

como é constatado em [27]. Pretende-se somente salvaguardar a integrabilidade de certas funções, tendo sempre presente pelo caminho a igualdade inferior (2.7) *já obtida.*

2.7 Conclusão

Finalizamos a demonstração do Teorema Ergódico Subaditivo, analisando o caso em que as funções não estão mais sujeitas a nenhum tipo de limitação. Consideremos as funções ϕ_n^c e ϕ_-^c já definidas em (2.8), bem como

$$\phi_+^c = \max\{\phi_+, -c\}.$$

Tudo o que foi provado até este momento permite concluir que, para todo o $c > 0$ fixado,

$$\int \phi_-^c \, d\mu = \int \phi_+^c \, d\mu \in \mathbb{R},$$

pelo que $\phi_-^c = \phi_+^c$ em quase todo o ponto. Uma vez que $\phi_-^c \to \phi_-$ e $\phi_+^c \to \phi_+$ quando $c \to \infty$, concluímos que $\phi_- = \phi_+$ em quase todo o ponto e, deste modo, a demonstração do Teorema Ergódico Subaditivo.

Capítulo 3

Teorema Ergódico Multiplicativo

É objetivo do presente capítulo demonstrar os Teoremas de Oseledets B e C. A organização deste capítulo segue a do anterior, começando com a explicação da estrutura da prova seguida das várias fases (secções) que a compõe. Baseamo-nos essencialmente no texto de J. Bochi ([7], 2008) que por sua vez combina numa única prova elementos de P. Walters ([41], 1993) e de R. Manẽ ([24], 1987), esta última reproduzida também por M. Viana ([37]).

3.1 Estrutura da prova

Numa primeira instância, começamos por provar uma versão mais fraca do Teorema B para sistemas não necessariamente ergódicos (Secção 3.2), usando a noção de expoente de Lyapunov clássica em termos de limites superiores

$$\lambda^+(x,v) = \overline{\lambda}(x,v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Assim definidos, os expoentes existem sempre, pelo que o intuito aqui é perceber a construção das filtrações de Oseledets e as questões de mensurabilidade, válidas para o restante da prova.

Um trabalho mais sofisticado será requerido para a realização dos limites q.t.p., ou seja, para a parte *existencial* que na versão anterior não constituia obstáculo. Para isso estudamos alguma Teoria Ergódica de produtos semi-diretos que, em termos práticos, se traduz na ação dos cociclos lineares sobre o espaço projetivo euclideano (Secção 3.3). Essa é uma ideia algo natural porque a natureza intrínseca dos expoentes de Lyapunov prende-se com *direções*. Com as ferramentas anteriores, a atenção será dirigida para o fibrado minimal do cociclo onde o objetivo é imediatamente concretizado (Secção 3.4). Para estender indutivamente este raciocíno aos (eventuais) demais expoentes, será necessário construir fibrados complementares de maior crescimento exponencial, com tratamento separado para as versões unilateral (Secção 3.6) e bilateral (Secção 3.7), fazendo um estudo do comportamento subexponencial (Secção 3.5).

3.2 Versão *limite superior*

Nesta secção, vamos demonstrar uma versão mais fraca da versão unilateral (Teorema B), a qual chamaremos de versão *limite superior*. O motivo para esta nomenclatura prende-se com a noção clássica de expoente de Lyapunov

$$\overline{\lambda}(x, v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \tag{3.1}$$

com a convenção $\log(0) = -\infty$. Para além de existirem sempre, estes expoentes gozam de boas propriedades algébricas de modo a possibilitar uma construção clara dos espaços de Oseledets. Recordamos que estamos a tomar como modelo de espaço de probabilidade de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço métrico compacto X com a σ-álgebra dos borelianos $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{|\mu}$ completada em relação à probabilidade μ. Propomo-nos provar o seguinte resultado (inspirado em [41]), onde a hipótese do espaço ser métrico compacto não é um requerimento essencial, conquanto a probabilidade seja completa.

Teorema 3.1. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade completo e $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva μ. Seja $A : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ uma aplicação mensurável tal que $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$. Nestas condições, em μ-quase todo o ponto $x \in X$, existem $k = k(x)$ números reais $\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_k(x)$ e uma única filtração linear*

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > V_x^2 > \cdots > V_x^k > V_x^{k+1} = \{0\}$$

tais que, para todo $1 \leqslant i \leqslant k$, se tem

1. *$k(x) = k(Tx)$, $\lambda_i(x) = \lambda_i(Tx)$, $A(x) \cdot V_x^i = V_{Tx}^i$ e*

2. *$\overline{\lambda}(x, v_i) = \lambda_i(x)$, sempre que $v_i \in V_x^i \backslash V_x^{i+1}$.*

Além disso, $k(x)$, $\lambda_i(x)$ e os espaços V_x^i dependem de forma mensurável de x.

3.2.1 Condição de integrabilidade

Começamos por analisar o papel que a hipótese $\log^+ \|A^{\pm 1}(x)\| \in L^1(\mu)$ desempenha para as conclusões do teorema. Notamos de passagem que esta é mais forte do que à primeira vista possa parecer, no sentido em que

$$\log^+ \|A^{\pm 1}(x)\| \in L^1(\mu) \Leftrightarrow |\log \|A^{\pm 1}(x)\|\,| \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \log^- \|A^{\pm 1}(x)\| \in L^1(\mu).$$

Dito isto, vejamos que qualquer uma das condições de integrabilidade acima serve para assegurar tipicamente a finitude dos expoentes de Lyapunov $\overline{\lambda}(x,v)$.

Lema 3.1. *Seja* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *um espaço de probabilidade e* $T : X \to X$ *uma transformação mensurável que preserva* μ. *Seja* $A : X \to GL(\mathbb{R},d)$ *uma aplicação mensurável tal que* $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$. *Então* $\overline{\lambda}(x,v) \in \mathbb{R}$*, para quase todo o ponto* $x \in X$ *e todo* $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

Prova: Trata-se de uma consequência do Teorema Ergódico de Birkhoff [B.3]. Com efeito, observando que

$$\|A^{(n)}(x) \cdot v\| \leqslant \|A^{(n)}(x)\| \cdot \|v\| \leqslant (\prod_{i=0}^{n-1} \|A(T^i x)\|) \cdot \|v\|$$

e

$$\|A^{(n)}(x) \cdot v\| \geqslant \|A^{(n)}(x)^{-1}\|^{-1} \cdot \|v\| \geqslant (\prod_{i=0}^{n-1} \|A^{-1}(T^i x)\|^{-1}) \cdot \|v\|,$$

obtem-se

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} -\log^+ \|A^{-1}(T^i x)\| \leqslant \overline{\lambda}(x,v) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log^+ \|A(T^i x)\|.$$

A condição de integrabilidade $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ implica que os extremos da desigualdade acima são números reais em quase todo o ponto, donde se obtem a conclusão do lema. □

Este é essencialmente o único papel da hipótese $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ na versão *limite superior*. De facto, *todos* os pontos são regulares no sentido do Teorema 3.1 (i.e., conquanto os expoentes possam ser $\pm\infty$) e, além disso, todos os objetos (expoentes de Lyapunov, seu número e espaços de Oseledets) variam mensuravelmente com $x \in X$. Esse é o trabalho das próximas subsecções.

Convém ainda fazer uma pequena observação. Nestes resultados, quando falarmos em propriedades que valham q.t.p., podemos sempre assumir que conjunto onde elas valem é também T-invariante. Este cuidado adicional para garantir a regularidade ao longo das órbitas não restringe o conteúdo dos mesmos em termos da medida pois dado um conjunto $Y \subset X$ tal que $\mu(Y) = 1$, existe $Z \subset Y$ satisfazendo $\mu(Z) = 1$ e $T(Z) \subset Z$: basta tomar

$$Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(Y),$$

o conjunto dos pontos de Y cuja T-órbita está contida em Y. Se a transformação for invertível, podemos escolher Z tal que $T^{-1}(Z) = Z$. Assim, podemos assumir que o conjunto de probabilidade total onde os expoentes associados a vetores não-nulos são finitos é também T-invariante.

3.2.2 Filtrações lineares

Dirigimos agora a atenção para as propriedades algébricas principais dos expoentes $\overline{\lambda}(x, v)$. Uma vez desejando estudar o seu comportamento em cada fibra $E_x = \mathbb{R}^d$ e analisar a maneira como se obtêm os subespaços de Oseledets V_x^i, é mais expressivo escrevê-los na forma $\overline{\lambda}_x(v)$, prática que adotaremos por um momento. Antes disso, deixamos os seguintes factos sobre sucessões de números reais que serão úteis para referência futura.

Lema 3.2. *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de números reais não negativos. Então*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) = \max\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log a_n,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log b_n\} \text{ e}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \geqslant \max\{\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log a_n,\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log b_n\}.$$

Lema 3.3. *Seja $\overline{\lambda} : X \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a função expoente de Lyapunov definida por* (3.1)*. Então, para todos $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $v, w \in \mathbb{R}^d$, valem*

1. $\overline{\lambda}_x(0) = -\infty$,
2. $\overline{\lambda}_x(\alpha \cdot v) = \overline{\lambda}_x(v)$,
3. $\overline{\lambda}_x(v + w) \leqslant \max\{\overline{\lambda}_x(v), \overline{\lambda}_x(w)\}$, *com igualdade se* $\overline{\lambda}_x(v) \neq \overline{\lambda}_x(w)$, *e*
4. $\overline{\lambda}_x(v) = \overline{\lambda}_{Tx}(A(x) \cdot v)$.

Prova: Vamos provar separadamente cada um dos itens expressos no lema.

1. Resulta da convenção $\log(0) = -\infty$.

2. Dado que $\|A^{(n)}(x) \cdot (\alpha v)\| = \|\alpha \cdot A^{(n)}(x) \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|A^{(n)}(x) \cdot v\|$, para todo o natural n, as propriedades do logaritmo implicam
$$\overline{\lambda}_x(\alpha \cdot v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|\alpha| + \frac{1}{n} \log\|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \overline{\lambda}_x(v).$$

3. Observando que $\|A^{(n)}(x) \cdot (v + w)\| \leqslant \|A^{(n)}(x) \cdot v\| + \|A^{(n)}(x) \cdot w\|$, a desigualdade segue do Lema 3.2 aplicado a $a_n = \|A^{(n)}(x) \cdot v\|$ e $b_n = \|A^{(n)}(x) \cdot w\|$. Para deduzir a igualdade no caso em que $\overline{\lambda}_x(v) \neq \overline{\lambda}_x(w)$, podemos usar os resultados já obtidos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{\lambda}_x(v) < \overline{\lambda}_x(w)$, de modo que $\max\{\overline{\lambda}_x(v), \overline{\lambda}_x(w)\} = \overline{\lambda}_x(w)$. Então
$$\overline{\lambda}_x(v + w) \leqslant \overline{\lambda}_x(w) = \overline{\lambda}_x(v + w - v) \leqslant \max\{\overline{\lambda}_x(v + w), \overline{\lambda}_x(v)\},$$
uma vez que $\overline{\lambda}_x(v) = \overline{\lambda}_x(-v)$, pela propriedade (2). Se $\overline{\lambda}_x(v + w) < \overline{\lambda}_x(v)$, as desigualdades acima implicam $\overline{\lambda}_x(w) \leqslant \overline{\lambda}_x(v)$, o que contradiz a nossa hipótese. Logo, $\overline{\lambda}_x(v + w) \geqslant \overline{\lambda}_x(v)$, e deduz-se das mesmas desigualdades que $\overline{\lambda}_x(v + w) = \overline{\lambda}_x(w)$.

4. A prova deste item reduz-se ao seguinte cálculo
$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}_{Tx}(A(x) \cdot v) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\|A^{(n+1)}(x) \cdot v\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \log\|A^{(n+1)}(x) \cdot v\| \\
&= \overline{\lambda}_x(v).
\end{aligned}$$

□

Em certos textos, faz-se um estudo abstrato destes expoentes relaxados (veja-se [4], [5]) e geralmente uma aplicação $\lambda : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, que satisfaça as três primeiras propriedades do lema diz-se um *expoente caraterístico*. As propriedades algébricas subjacentes aos expoentes de Lyapunov permitem construir diretamente as filtrações de Oseledets expressas no enunciado. Isso é algo que podemos fazer em todos os pontos ainda que sem a garantia dos expoentes serem finitos.

Lema 3.4. *Em todo o ponto $x \in X$, existem $k = k(x) \in \mathbb{N}$ números $\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_k(x)$ (possivelmente tomando valores em $\{\pm\infty\}$) e uma filtração linear*

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > V_x^2 > \cdots > V_x^k > V_x^{k+1} = \{0\}$$

tais que, para todo $1 \leqslant i \leqslant k$, se tem

1. $k(x) = k(Tx)$, $\lambda_i(x) = \lambda_i(Tx)$, $A(x) \cdot V_x^i = V_{Tx}^i$ *e*
2. $\overline{\lambda}(x, v_i) = \lambda_i(x) \Leftrightarrow v_i \in V_x^i \backslash V_x^{i+1}$.

Além disso, para cada $x \in X$, os expoentes, o seu número e os subespaços são únicos.

Prova: Decorre da propriedade (2) do Lema 3.3 que se $\overline{\lambda}_x(v) \neq \overline{\lambda}_x(w)$, os vetores não nulos v e w são linearmente independentes. Assim, $\overline{\lambda}_x(\cdot)$ pode tomar no máximo d valores distintos em $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, digamos

$$\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_{k(x)}(x),$$

onde $k(x)$ designa o número desses valores distintos (i.e., expoentes de Lyapunov em x). Por (2) e (3) do Lema 3.3, os espaços

$$V_x^i := \{v \in \mathbb{R}^d \,:\, \overline{\lambda}_x(v) \leqslant \lambda_i(x)\}, \;\; i = 1, \ldots, k(x),$$

são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^d$ (note-se que $0 \in V_x^i$ pois $\overline{\lambda}_x(0) = -\infty$). Por definição, são também encaixados

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > V_x^2 > \cdots > V_x^k > V_x^{k+1} = \{0\}$$

sendo claro que $v_i \in V_x^i \backslash V_x^{i+1} \Leftrightarrow \overline{\lambda}_x(v_i) = \lambda_i(x)$. Finalmente, do ponto (4) do mesmo lema e do facto de $A(x) \in GL(\mathbb{R}, d)$, deduz-se que a filtração de Oseledets em x se transporta para a de Tx, mais precisamente

$$k(x) = k(Tx), \;\; \lambda_i(x) = \lambda_i(Tx) \;\; \text{e} \;\; A(x) \cdot V_x^i = V_{Tx}^i.$$

Resumindo o que foi dito, temos

$$\{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_k(x)\} = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, \lambda = \overline{\lambda}_x(v) \;\text{ para algum } v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}\}$$

e

$$V_x^j = \{v \in \mathbb{R}^d \,:\, \overline{\lambda}_x(v) \leqslant \lambda_j(x)\}$$

de modo que os expoentes, o seu número e os subespaços estão unicamente determinados.

□

3.2.3 Mensurabilidade

Para concluir a demonstração do Teorema 3.1, analisaremos as questões de mensurabilidade ainda pendentes, começando por elucidar o significado da dependência mensurável dos expoentes, do seu número e dos espaços de Oseledets.

A mensurabilidade do número de expoentes $k(x)$ traduz-se na mensurabilidade da aplicação $k : X \to \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ se encontra munido com a σ-álgebra das suas partes $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Não é dificil verificar que isso equivale à mensurabilidade dos conjuntos

$$K_i := \{x \in X \ : \ k(x) \geqslant i\},$$

para todo o natural $1 \leqslant i \leqslant d$, que são precisamente aqueles em que os expoentes λ_i estão definidos, respetivamente. Dizer que estes são mensuráveis significa que $\lambda_i : K_i \to \mathbb{R}$ é mensurável com respeito à σ-álgebra restrita a K_i dada por

$$\mathcal{A}_i := \{A \cap K_i \ : \ A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A},$$

o que implica mesmo a mensurabilidade com respeito a $\mathcal{A}$, se com isso se quer dizer que $\lambda_i^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, a σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}^d$. Por fim, resta esclarecer a dependência mensurável dos espaços de Oseledets. Isso é feito em termos da linguagem dos *fibrados vetoriais* (mensuráveis). Considere-se uma aplicação $x \mapsto V_x$ que a cada ponto $x \in X$ associa um subespaço vetorial linear V_x de $\mathbb{R}^d$ (i.e., toma valores nas *grassmannianas*). Dizemos que esta aplicação é mensurável se

- $x \in X \mapsto \dim V_x$ é mensurável e
- para cada natural k tal que $\mathcal{D}_k := \{x \in X \ : \ \dim V_x = k\} \neq \varnothing$, existem aplicações mensuráveis $v_1, \ldots, v_k : \mathcal{D}_k \to \mathbb{R}^d$ de modo que, para todo $x \in \mathcal{D}_k$, o conjunto

  $$B_x := \{v_1(x), \ldots, v_k(x)\}$$

  é uma base de V_x.

Nestas circunstâncias, a família de subespaços $\{V_x\}_{x \in X}$ tem uma estrutura natural de *fibrado vetorial mensurável sobre* X de acordo com a Definição C.1, terminologia que será adotada.

Do ponto de vista da medida, interessa essencialmente a maneira como os fibrados estão definidos num conjunto de probabilidade total, identificando por esse motivo dois fibrados $\{U_x\}_{x\in X}$ e $\{V_x\}_{x\in X}$, escrevendo $U = V$, se

$$U_x = V_x, \text{ para q.t.p. } x \in X.$$

Dizer que os subespaços de Oseledets V_x^i dependem de forma mensurável de x significa assim que a aplicação $x \mapsto V_x^i$ é mensurável no seu domínio de definição K_i com a σ-álgebra restrita $\mathcal{A}_i$ ou, equivalentemente, que $V^i := \{V_x^i\}_{x\in K_i}$ é um fibrado mensurável. Apesar de intrínseca, a definição acima não é tão conveniente para efeitos de demonstrações. Optaremos pelo seguinte critério alternativo para a mensurabilidade onde, pela primeira (e última!) vez, precisamos de assumir a completude do espaço, mas não necessariamente que seja métrico compacto, de probabilidade ou sequer de medida finita.

Teorema 3.2. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo e $x \mapsto V_x$ uma aplicação que a cada ponto $x \in X$ associa um subespaço vetorial V_x de $\mathbb{R}^d$. Então são equivalentes:*

1. *$x \mapsto V_x$ é mensurável.*
2. *$\{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \,:\, x \in X,\ v \in V_x\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Nota 3.1. *É possível ainda (e comum) exprimir a mensurabilidade dos subespaços em termos das grassmanianas de $\mathbb{R}^d$ (ver por exemplo [24]). Sendo variedades diferenciáveis, e portanto com uma estrutura topológica, permitiriam-nos definir a mensurabilidades nos termos mais convencionais em que a imagem inversa de borelianos é mensurável. Não adotaremos também essa abordagem, mas referimos porém que tal definição poderia ser incluida no Teorema 3.2 e, de facto, é equivalente à definição dada sem pressupor a completude do espaço de probabilidade (veja-se [41]), uma desvantagem do critério acima.*

Para demonstrarmos o critério acima e as demais questões de mensurabilidade, usaremos o seguinte resultado de Teoria de Medida, que se baliza numa lista de resultados de *projeção e seleção/secção mensuráveis*, constituindo uma versão particular de um resultado mais geral [ver [8], 2º vol., pág. 39, Teorema 6.9.12].

Teorema 3.3. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo, M um espaço métrico completo separável e $\pi_X : X \times M \to X$ a projeção natural. Nestas condições, para todo $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(M)$, tem-se*

1. $\pi(C) \in \mathcal{A}$ *e*

2. existe uma função mensurável $\xi : \pi(C) \to M$ *tal que o gráfico*

$$\Gamma_\xi := \{(x, \xi(x)) \in X \times M \;:\; x \in \pi(C)\}$$

está contido em C.

Nota 3.2. *O ponto 1 do Teorema 3.3 não é válido para espaços mensuráveis gerais, como se poderia pensar por analogia com o caso topológico onde as projeções dum produto de espaços num dos fatores são abertas, i.e., enviam abertos em abertos. Esta questão, investigada inicialmente no contexto do plano («a projeção de um boreliano do plano nos eixos será ainda boreliana?»), foi posteriormente refutada a custo do esforço de diversos matemáticos, com destaque para M. Suslin (*$1894 - 1919$*) que desenvolveu a noção dos agora chamados conjuntos e espaços de Souslin (veja-se [8] para um tratamento detalhado desta teoria). Espaços métricos completos e separáveis são exemplos práticos importantes de espaços de Souslin.*

Prova do Teorema 3.2. (1) $\Rightarrow$ (2): Uma vez que $x \mapsto \dim V_x$ é mensurável, cada conjunto $\mathcal{D}_k := \{x \in X \;:\; \dim V_x = k\}$ é mensurável e tem-se $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{d} \mathcal{D}_i$. Claramente,

$$\{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \;:\; x \in \mathcal{D}_d,\; v \in V_x\} = \mathcal{D}_d \times \mathbb{R}^d \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

pelo que resta analisar os casos em que $1 \leqslant k < d$. Sejam $v_1, \ldots, v_k : \mathcal{D}_k \to \mathbb{R}^d$ aplicações mensuráveis tais que o conjunto $\{v_1(x), \ldots, v_k(x)\}$ é uma base de V_x. Note-se que a condição $x \in \mathcal{D}_k$ e $v \in V_x$ é equivalente à dependência linear dos vetores $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ e v. Isto por sua vez é equivalente ao facto do determinante da *matriz de Gram*, definida por

$$G(x, v) := A^t(x, v) \cdot A(x, v),$$

ser nulo, onde $A(x, v) = [v_1(x) \cdots v_k(x)\, v]$ é a matriz de dimensões $d \times (k+1)$ cujas colunas são os vetores assinalados. A função $f_k(x, v) = \det G(x, v)$ é mensurável, logo

$$\{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \;:\; x \in \mathcal{D}_k,\; v \in V_x\} = f_k^{-1}(0) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Como $1 \leqslant k < d$ é arbitrário, a prova desta implicação está concluída tomando a união desses conjuntos (disjuntos) mensuráveis.

(2)$\Rightarrow$ (1): Observe-se que mostrar a mensurabilidade de $x \mapsto \dim V_x$ equivale a mostrar a mensurabilidade dos conjuntos $R_i := \{x \in X \,:\, \dim V_x \geqslant i\}$, para todo natural $1 \leqslant i \leqslant d$. Temos a seguinte cadeia encaixada

$$X = R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_d \supset R_{d+1} = \varnothing.$$

Por hipótese,

$$C := \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \,:\, x \in X,\ v \in V_x\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Começemos por definir $E_0 := X \times \{0\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e considere-se $\Pi_1 := C \backslash E_0 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Se $\Pi_1 = \varnothing$ nada mais há a provar. De outro modo, pelo Teorema 3.3, temos $\pi_X(\Pi_1) \in \mathcal{A}$ e note-se que $\pi_X(\Pi_1) = R_1$. Logo, ainda pelo Teorema 3.3, existe uma função mensurável $v_1 : R_1 \to \mathbb{R}^d$ tal que $v_1(x) \in V_x \backslash \{0\}$. Pela implicação já demonstrada, aplicada a

$$x \in R_1 \mapsto \langle v_1(x) \rangle_{\mathbb{R}},$$

conclui-se que o conjunto $E_1 := \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \,:\, x \in R_1, v \in \langle v_1(x) \rangle_{\mathbb{R}}\}$ é mensurável. Logo $\Pi_2 := \Pi_1 \backslash E_1$ é mensurável. Mais uma vez, se $\Pi_2 = \varnothing$ nada mais há a provar. De outro modo, $\pi_X(\Pi_2) = R_2 \in \mathcal{A}$ e existe uma aplicação mensurável $v_2 : R_2 \to \mathbb{R}^d$ tal que $v_2(x) \in V_x \backslash \langle v_1(x) \rangle_{\mathbb{R}}$. Tomando a aplicação

$$x \in R_2 \mapsto \langle v_1(x), v_2(x) \rangle_{\mathbb{R}},$$

conclui-se que $E_2 := \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \,:\, x \in R_2, v \in \langle v_1(x), v_2(x) \rangle_{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Por indução, obtemos assim a mensurabilidade de todos os conjuntos R_i bem como a existência de aplicações mensuráveis $v_1, \ldots, v_j$ nos seus domínios de definição tais que, para todo o natural k e $x \in \mathcal{D}_k$, o conjunto $\{v_1(x), \ldots, v_k(x)\}$ é uma base de V_x. $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar a mensurabilidade dos expoentes, do seu número e dos espaços de Oseledets.

Lema 3.5. *Tem-se o seguinte:*

1. $k : X \to \mathbb{N}$ *é mensurável,*

2. $x \in K_i \mapsto V_x^i$ *é mensurável e*

3. $\lambda_i : K_i \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *é mensurável.*

Prova: Recordamos que mostrar a mensurabilidade de k equivale a mostrar a mensurabilidade dos conjuntos $K_i := \{x \in X \,:\, k(x) \geqslant i\}$, nos casos em que $1 \leqslant i \leqslant d$. Começamos por observar que $K_1 = \{x \in X \,:\, k(x) \geqslant 1\} = X$ é mensurável e claramente a aplicação $x \in X \mapsto V_x^1 = \mathbb{R}^d$ também. Observe-se que cada função

$$\lambda_n(x, v) = \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\|$$

é mensurável pois é a composta de função contínua com uma função mensurável. Desse modo, conclui-se que $\overline{\lambda}(x, v) = \limsup_{n\to\infty} \lambda_n(x, v)$ é mensurável. Daí decorre imediatamente a mensurabilidade de λ_1 pois

$$\lambda_1(x) = \max_{v\in\mathbb{R}^d} \overline{\lambda}(x, v) = \max_{1\leqslant i\leqslant d} \overline{\lambda}(x, e_i)$$

e fixado $v \in \mathbb{R}^d$ arbitrário a restrição $\overline{\lambda}_v(x) = \overline{\lambda}(x, v)$ é mensurável. Com isto mostramos a mensurabilidade de K_1, V^1 e λ_1. Agora procedemos indutivamente para mostrar a mensurabilidade dos outros expoentes e subespaços de Oseledets. Seja $E_0 = X \times \{0\}$ e considere-se o subconjunto de $X \times \mathbb{R}^d$ dado por

$$\Lambda_1 := \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \,:\, \overline{\lambda}(x, v) < \lambda_1(x)\} \backslash E_0.$$

Dado que $\overline{\lambda}$ e λ_1 são mensuráveis, $\Lambda_1 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Pelo Teorema 3.3, tem-se $\pi_X(\Lambda_1) \in \mathcal{A}$ e note-se que $\pi(\Lambda_1) = K_2$. Se $K_2 = \varnothing$, nada mais há a provar. De outro modo, considerando a função $x \in K_2 \to V_x^2$ obtemos pelo Teorema 3.2 que a mesma é mensurável pois

$$\{(x, v) \,:\, x \in K_2,\ v \in V_x\} = \{(x, v) \in K_2 \times \mathbb{R}^d \,:\, \overline{\lambda}(x, v) < \lambda_1(x)\} \in \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Assim, por definição, em cada fatia mensurável não vazia $\mathcal{D}_k \subset K_2$ existem aplicações mensuráveis $v_1, \ldots, v_k : \mathcal{D}_k \to \mathbb{R}^d$ tais que $\{v_1(x), \ldots, v_k(x)\}$ é uma base de V_x^2 e portanto, nessa fatia,

$$\lambda_2(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} \overline{\lambda}(x, v_i(x))$$

é mensurável, o que implica a mensurabilidade global de λ_2 em K_2 com respeito a $\mathcal{A}_2$. Mostramos a mensurabilidade de K_2, V^2 e λ_2. Por um argumento análogo ao que foi feito acima segue indutivamente a mensurabilidade dos restantes. $\square$

Nota 3.3. *A completude do espaço de probabilidade surgiu aqui misteriosamente como hipótese conveniente para o tratamento das questões de mensurabilidade, fornecendo um critério simples e elegante. Numa primeira vista, poderíamos pensar que a mensurabilidade nada deveria ter a haver com qualquer medida que se coloque no espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$*, mesmo sendo certo que a completude de* μ *coloca certas retrições a* $\mathcal{A}$*. De qualquer forma, podemos melhorar as hipóteses do Teorema 3.1: ele é também válido para quaisquer espaços de probabilidade* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *tais que* $(X, \mathcal{A})$ *admite uma medida* ν *com respeito à qual* $(X, \mathcal{A}, \nu)$ *é completo.*

Com isto termina a prova do Teorema 3.1. Notamos que as multiplicidades dos expoentes de Lyapunov λ_i dadas por $x \in K_i \mapsto \dim V_x^i - \dim V_x^{i+1}$ são também mensuráveis. Apesar de não ser estritamente essencial para o natural seguimento da prova, aproveitamos a ocasião para demonstrar rapidamente a seguinte proposição sobre a mensurabilidade do conjunto dos pontos positivamente regulares, um facto que poderia ser útil se ambicionássemos provar versões não-ergódicas do Teorema de Oseledets. Se o leitor desejar, pode saltar esta parte avançando para o Corolário 3.1 da versão *limite superior*.

Proposição 3.1. $\mathcal{R}^+(T) \in \mathcal{A}$.

Prova: Notamos que $x \in \mathcal{R}^+(T)$ se, e somente se, $\lambda^+(x, v)$ existe e é finito, para todo $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ (uma implicação é óbvia, a outra segue diretamente da discussão sobre filtrações lineares). Para analisar a parte da existência no membro direito da equivalência acima, consideramos o conjunto

$$\Gamma := \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \,:\, \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\|\}.$$

Note-se que de $\Gamma \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Temos ainda

$$\Omega := \{x \in X \,:\, \lambda^+(x, v) \text{ existe para todo } v \in \mathbb{R}^d\} = \pi(\Gamma) \backslash \pi((\pi(\Gamma) \times \mathbb{R}^d) \backslash \Gamma),$$

que, pelo Teorema 3.3, é mensurável. Para a parte da finitude dos expoentes, sejam

$$\Delta_0 := \{x \in X \,:\, \lambda_1(x) = \infty\} \text{ e}$$

$$\Delta_i := \{x \in k^{-1}(i) \,:\, \lambda_i(x) = -\infty\}, \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Todos estes conjuntos são igualmente mensuráveis. Finalmente,

$$\mathcal{R}^+(T) = \Omega \backslash \bigcup_{i=0}^{d} \Delta_i$$

é também mensurável. $\square$

Regressando à prova, o ponto de partida para as versões mais ambiciosas dos Teoremas de Oseledets B e C será o seguinte corolário (versão ergódica) do Teorema 3.1.

Corolário 3.1. *Nas mesmas hipóteses do Teorema 3.1, se adicionalmente T for ergódica, existem números reais*

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$$

e, em μ-quase todo o ponto $x \in X$, há uma filtração linear

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > V_x^2 > \cdots > V_x^k > V_x^{k+1} = \{0\}$$

tal que, para todo $1 \leqslant i \leqslant k$, se tem

1. $A(x) \cdot V_x^i = V_{Tx}^i$ *e*

2. $\overline{\lambda}(x, v) = \lambda_i$, *sempre que* $v_i \in V_x^i \backslash V_x^{i+1}$.

Além disso, os espaços V_x^i dependem de forma mensurável do ponto da base x e tem dimensão constante $\dim_{\mathbb{R}}(V_x^i) = d_i$.

Nota 3.4. *Muitos dos resultados que aqui vemos, tais como o Corolário 3.1, poderiam ser reformulados facilmente para morfismos em subfibrados invariantes mensuráveis $\{V_x\}_{x \in X}$ de dimensão constante. De facto, é sempre possível reduzi-los ao caso do fibrado trivial, i.e., $X \times \mathbb{R}^m$, conjugando o morfismo com alguma mudança de coordenadas mensurável (temperada) $O : X \to O(\mathbb{R}, m)$ tal que $O(x) \cdot V_x = \mathbb{R}^m$, obtendo assim um cociclo cohomólogo com esta propriedade (ver Apêndice C para detalhes). Esta ideia de redução estará implícita em diversos pontos ao longo da prova.*

3.3 Teoria Ergódica de produtos semi-diretos

Nesta e na próxima secção, vamos explorar ideias patentes em [41] que culminam no Lema 3.7. A ideia natural na sequência da secção precedente é mostrar que os expoentes de Lyapunov relaxados $\overline{\lambda}(x, v)$ são genericamente limites, com alguma informação adicional no caso das transformações invertíveis.

Seja $(Y, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e considere-se $X \times Y$ munido com a σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Uma transformação mensurável $S : X \times Y \to X \times Y$ diz-se um *produto semi-direto* sobre $T : X \to X$ se $\pi \circ S = T \circ \pi$, ou seja, se for da forma $S(x, v) = (Tx, S_x v)$.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{S} & X \times Y \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Esta definição é parecida com a dos cociclos, mas aqui ignoramos a exigência de qualquer tipo de linearidade. Observamos que sendo S mensurável, as aplicações $S_x : Y \to Y$ são mensuráveis para todo $x \in X$. Para os nossos propósitos, vamos considerar o caso em que $Y = P$ é um espaço métrico compacto, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(P)$ é a σ-álgebra dos borelianos de P e as aplicações $S_x : P \to P$ são bijeções contínuas, para todo $x \in X$.

Denotamos por $C^0(P)$ o espaço vetorial real das funções contínuas $f : P \to \mathbb{R}$ com a norma da convergência uniforme

$$\|f\|_{C^0} = \sup_{v \in P} |f(v)|.$$

É facto estabelecido que $(C^0(P), \|\cdot\|_{C^0})$ é um espaço de Banach separável. Seja $\mathcal{F}$ o espaço vetorial real de todas as aplicações mensuráveis $\phi : X \times P \to \mathbb{R}$ tais que

1. $\phi(x, \cdot) := \phi_x \in C^0(P)$, para todo $x \in X$, e

2. $x \in X \mapsto \|\phi_x\|_{C^0} \in L^1(\mu)$

quocientado pela relação de equivalência

$$\phi \sim \psi \Leftrightarrow \phi_x = \psi_x, \text{ para } \mu\text{-quase todo o ponto } x \in X.$$

Adotamos a prática recorrente, ainda que não inteiramente rigorosa do ponto de vista técnico, de pensar os elementos de $\mathcal{F}$ simplesmente como funções no sentido usual sem considerá-los como classes de equivalência. Como complemento ao ponto 2, notamos que se $\phi : X \times P \to \mathbb{R}$ é mensurável então a aplicação $x \in X \mapsto \|\phi_x\|_{C^0} \in \mathbb{R}$ é mensurável: tome-se um subconjunto enumerável denso de P, digamos $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e observe-se que

$$\|\phi_x\|_{C^0} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi(x, v_n)|.$$

É também verdade que $x \in X \mapsto \phi_x \in C(P)$ é mensurável para a σ-álgebra induzida pela topologia uniforme em $C(P)$. Munimos $\mathcal{F}$ com a norma

$$\|\phi\| = \int_X \|\phi_x\|_{C^0}\, d\mu.$$

A verificação de que $\|\cdot\|$ é uma norma é rotineira pelo que a omitimos. As funções contínuas são densas em $\mathcal{F}$ com respeito a esta norma pelo que temos o seguinte facto, cuja demonstração, apesar de longa e em parte padronizada, optamos por incluir.

Proposição 3.2. $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach separável.*

Prova: Seja $(\phi_n)_n$ uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{F}$. Queremos ver que existe uma função $\phi \in \mathcal{F}$ tal que $\|\phi_n - \phi\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $(\phi_n)_n$ é de Cauchy, podemos extrair um subsucessão $(\phi_{n_k})_k$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tem

$$\|\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Definimos as seguintes funções:

$$\psi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \|\phi_{n_{i+1}}(x,\cdot) - \phi_{n_i}(x,\cdot)\|_{C^0} \quad \text{e} \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_{n_{i+1}}(x,\cdot) - \phi_{n_i}(x,\cdot)\|_{C^0}.$$

Cada função ψ_k é mensurável, logo $\psi = \lim_k \psi_k$ é mensurável. Aplicando o Lema de Fatou [A.3], temos

$$\int \psi\, d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int \psi_k\, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|\phi_{n_{i+1}} - \phi_{n_i}\| \leqslant 1$$

e, portanto, ψ é finita q.t.p.. Deste modo, para μ-quase todo o ponto $x \in X$ e para todo $v \in P$, a série

$$\phi_{n_1}(x, v) + \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_{n_{i+1}} - \phi_{n_i})(x, v)$$

é absolutamente convergente. Seja ϕ a soma da série nos pontos onde ela converge e alguma constante fixada nos pontos onde a convergência não é assegurada. Como

$$\phi_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (\phi_{n_{i+1}} - \phi_{n_i}) = \phi_{n_k},$$

temos $\lim_k \phi_{n_k} = \phi$, para quase todo o ponto $x \in X$ e para todo $v \in P$. Vejamos que $\phi \in \mathcal{F}$ e $\|\phi_n - \phi\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Para cada ponto x onde há convergência, temos

$$\|\phi(x, \cdot) - \phi_{n_k}(x, \cdot)\|_{C^0} \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \|\phi_{n_{i+1}}(x, \cdot) - \phi_{n_i}(x, \cdot)\|_{C^0} \to 0$$

quando $k \to \infty$. Logo, $\phi_x = \phi(x, \cdot)$, sendo o limite uniforme de funções contínuas, é ainda uma função contínua. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n > N$ se tem $\|\phi_n - \phi_m\| < \epsilon$. Aplicando outra vez o Lema de Fatou, para $n > N$ temos

$$\|\phi - \phi_n\| = \int_X \|\phi(x, \cdot) - \phi_n(x, \cdot)\|_{C^0}\, d\mu \leqslant \liminf_k \int_X \|\phi_{n_k}(x, \cdot) - \phi_n(x, \cdot)\|_{C^0}\, d\mu < \epsilon.$$

Logo, $\|\phi\| < \infty$, pelo que $\phi \in \mathcal{F}$ e também $\|\phi_n - \phi\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Com isto provamos a completude de $\mathcal{F}$ relativamente à norma.

Vejamos agora a separabilidade. Para isso, vamos mostrar que, para toda a função $\phi \in \mathcal{F}$ e $\epsilon > 0$, existe uma função ψ contínua tal que $\|\phi - \psi\| < \epsilon$. A separablidade de $\mathcal{F}$ segue assim do facto de $C^0(X \times P)$ ser separável (pois $X \times P$ é métrico compacto). Fixemos $\epsilon > 0$. Para todo $x \in X$, ϕ_x é uniformemente contínua e por isso existe $\delta(x) > 0$ tal que

$$d(v_1, v_2) < \delta(x) \Rightarrow |\phi_x(v_1) - \phi_x(v_2)| < \frac{\epsilon}{6}, \text{ para todo } v_1, v_2 \in P.$$

Podemos escolher $\delta(x)$ mensurável. Considere-se a medida ν definida por

$$\nu(B) = \int_B \|\phi_x\|_{C^0}\, d\mu, \text{ para todo o boreliano } B.$$

Seja $A_\delta := \{x \in X \,:\, \delta(x) \leqslant \delta\}$ e tome-se $\delta_0 > 0$ tal que $\nu(A_{\delta_0}) < \epsilon/6$. Tomemos uma partição da unidade δ_0-fina, ou seja, uma coleção de funções contínuas $h_1, \ldots, h_n : P \to [0, 1]$ tais que

- $h_1(v) + \cdots + h_n(v) = 1$, para todo $v \in P$, e
- $A_i := \{v \in P \,:\, h_i(v) > 0\}$ tem diâmetro menor que δ_0, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$.

(ver Proposição A.8, acerca da existência de tal partição). Fixemos um ponto v_i em cada A_i e tomemos um função contínua $f_i : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_X |\phi(x, v_i) - f_i(x)|\, d\mu < \frac{\epsilon}{2n}$$

(ver Proposição A.9, acerca da densidade de funções contínuas em $L^1(\mu)$). Por fim, considere-se a função contínua

$$\psi(x, v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) h_i(v).$$

Vamos ver que $\|\phi - \psi\| < \epsilon$, o que concluirá a prova. Note-se que

$$\begin{aligned}
\|\phi_x - \psi_x\|_{C^0} &:= \sup_{v \in P} |\phi(x, v) - \psi(x, v)| \\
&\leqslant \sup_{v \in P} \sum_{i=1}^{n} |\phi(x, v) - f_i(x)| h_i(v) \\
&\leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{v \in A_i} |\phi(x, v) - f_i(x)| \\
&\leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{v \in A_i} |\phi(x, v) - \phi(x, v_i)| + \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\phi(x, v_i) - f_i(x)| \\
&\leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{v \in A_i} |\phi(x, v) - \phi(x, v_i)| + \sum_{i=1}^{n} |\phi(x, v_i) - f_i(x)|.
\end{aligned}$$

Logo, tem-se $\|\phi - \psi\| := \int \|\phi_x - \psi_x\|_{C^0}\, d\mu \leqslant I_1 + I_2$, onde

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{v \in A_i} |\phi(x, v) - \phi(x, v_i)|\, d\mu \\
&= \int_{A_{\delta_0}} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{v \in A_i} |\phi(x, v) - \phi(x, v_i)|\, d\mu + \int_{X \setminus A_{\delta_0}} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{v \in A_i} |\phi(x, v) - \phi(x, v_i)|\, d\mu \\
&\leqslant \int_{A_{\delta_0}} 2 \sup_{v \in P} |\phi(x, v)|\, d\mu + \int_{X \setminus A_{\delta_0}} \frac{\epsilon}{6}\, d\mu \\
&< \tfrac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

e

$$I_2 := \int \sum_{i=1}^{n} |\phi(x, v_i) - f_i(x)|\, d\mu < n \cdot \frac{\epsilon}{2n} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, $\|\phi - \psi\| < \epsilon$ como pretendido. □

Consideremos o espaço $\mathcal{M}(\mu)$ das probabilidades em $X \times P$ que se projetam em μ (i.e., tais que $\pi_* \nu = \mu$). Este é um subconjunto do espaço das probabilidades $\mathbb{P}(X \times P)$ que, como é sabido, é (sequencialmente) compacto para a topologia fraca*, onde uma sucessão de probabilidades $(\nu_n)_n$ converge para uma probabilidade ν se e somente se

$$\int \phi \, d\nu_n \to \int \phi \, d\nu \text{ para toda a função } \phi \in C^0(X \times P) \ .$$

Devido à densidade das funções contínuas em $\mathcal{F}$, tem-se a convergência supracitada para toda a função $\phi \in \mathcal{F}$. Temos ainda o seguinte facto, que revela uma propriedade importante de $\mathcal{M}(\mu)$.

Proposição 3.3. *$\mathcal{M}(\mu)$ é fechado no espaço das probabilidades $\mathbb{P}(X \times P)$ (e portanto compacto para a topologia fraca*).*

Prova: Seja $(\nu_n)_n$ uma sucessão de probabilidades em $\mathcal{M}(\mu)$ convergente para alguma probabilidade $\nu \in \mathbb{P}(X \times P)$. Queremos ver que $\nu \in \mathcal{M}(\mu)$, ou seja, que $\pi_* \nu = \mu$. Para isso basta ver que $\pi_* \nu$ e μ integram funções contínuas da mesma maneira. Com efeito, dada $f \in C^0(X)$ arbitrária temos

$$\int f \, d\pi_* \nu = \int f \circ \pi \, d\nu = \lim_{n \to \infty} \int f \circ \pi \, d\nu_n = \lim_{n \to \infty} \int f \, d\pi_* \nu_n = \lim_{n \to \infty} \int f \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

□

Dada $\psi \in \mathcal{F}$ e $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$\psi^{(n)} := \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ S^i = \psi + \psi \circ S + \cdots + \psi \circ S^{n-1}$$

e, quando S é invertível,

$$\psi^{(-n)} := -\sum_{i=1}^{n} \psi \circ S^{-i} = -\psi \circ S^{-1} - \cdots - \psi \circ S^{-n}.$$

Passamos a apresentar o lema que resume o essencial desta secção.

Lema 3.6. *Sejam $\psi \in \mathcal{F}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que para quase todo o ponto $x \in X$*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x, v) = c, \text{ para todo } v \in P.$$

Então a mesma afirmação é válida substituindo o limite superior pelo limite usual. Além disso, a convergência é uniforme sobre P, mais precisamente,

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{u \in P} \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x, v) = c = \lim_{n \to \infty} \sup_{u \in P} \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x, v) \quad \text{q.t.p.}.$$

No caso em que S é invertível, as mesmas conclusões são válidas também quando $n \to -\infty$.

Prova: Seja $I_n(x) = \inf_{v \in P} \psi^{(n)}(x,v)$. Tomando um subconjunto enumerável denso $\{v_k\}_k$ de P, concluimos que $I_n(x) = \inf_k \psi^{(n)}(x,v_k)$ é mensurável. Observe-se que $|I_1(x)| \leqslant \|\psi_x\|_{C^0}$ e portanto I_1 é integrável. Além disso, $(I_n)_n$ é uma sucessão superaditiva de funções mensuráveis com respeito a T, i.e.,

$$I_{m+n} \geqslant I_m + I_n \circ T^m,$$

pelo que é possível aplicar o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman [A] à sucessão $(-I_n)_n$ (que é agora subaditiva) para concluir a convergência da sucessão $(\frac{1}{n} I_n(x))_n$ para uma certa constante $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ em quase todo o ponto.

Para cada $x \in X$, seja $u_n(x) \in P$ um vetor que minimiza a função contínua $\psi^{(n)}(x,\cdot)$, ou seja, tal que $I_n(x) = \psi^{(n)}(x, u_n(x))$. Afirmo que é possível escolher u_n a depender de forma mensurável de x. Para isso, considere-se

$$\Delta_n = \{(x,v) \in X \times P \,:\, \psi^{(n)}(x,v) = I_n(x)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(P).$$

Claramente, $\pi_X(\Delta_n) = X$. Pelo Teorema 3.3, existe uma função mensurável $u_n : X \to P$ tal que $(x, u_n(x)) \in \Delta_n$, para todo $x \in X$, como pretendido.

Para o natural seguimento da demonstração, vamos provar a existência de uma probabilidade S-invariante em $X \times P$, através dos argumentos caraterísticos do Teorema de Krylov-Bogolubov [B.1]. Nessa linha de ideias, considerem-se as probabilidades ν_n^0 e ν_n em $\mathcal{M}(\mu)$ definidas por

$$\nu_n^0(B) = \mu(\{x \in X \,:\, (x, u_n(x)) \in B\}) \text{ e}$$

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_*^i \nu_n^0.$$

Seja (ν_{n_j}) uma subsucessão convergente, digamos para ν. Vejamos que ν é S-invariante. Para isso, basta ver que, para toda $\psi \in \mathcal{F}$, se tem $\int \psi \circ S \, d\nu = \int \psi \, d\nu$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|\textstyle\int \psi \circ S \, d\nu - \int \psi \, d\nu| &= \lim_j |\textstyle\int \psi \circ S \, d\nu_{n_j} - \int \psi \, d\nu_{n_j}| \\
&= \lim_j |\textstyle\int \psi \;\; d(S_* \nu_{n_j} - \nu_{n_j})| \\
&= \lim_j |\textstyle\int \psi \;\; d\frac{1}{n_j}(S_*^{n_j} \nu_{n_j}^0 - \nu_{n_j}^0)| \\
&\leqslant \lim_j \tfrac{2}{n_j} \textstyle\int \|\psi_x\|_{C^0} \, d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pela convergência na topologia fraca*, temos $\int \psi \, d\nu = \lim_j \int \psi \, d\nu_{n_j}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int \psi \, d\nu_{n_j} &= \tfrac{1}{n_j} \textstyle\sum_{i=0}^{n_j-1} \int \psi \circ S^i d\nu_{n_j}^0 \\
&= \tfrac{1}{n_j} \int \psi^{(n_j)} \, d\nu_{n_j}^0 \\
&= \tfrac{1}{n_j} \int \psi^{(n_j)}(x, u_{n_j}(x)) \, d\mu(x) \\
&= \tfrac{1}{n_j} \int I_{n_j} \, d\mu,
\end{aligned}$$

pelo que $\int \psi \, d\nu = \lim_j \frac{1}{n_j} \int I_{n_j} \, d\mu = b$, em virtude do Teorema Ergódico Subaditivo. Note-se que o Teorema Ergódico de Birkhoff implica que

$$\psi^*(x,u) := \lim_n \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x,u)$$

existe para ν-quase todo o ponto $(x,u) \in X \times P$. Uma vez que $\psi^{(n)}(x,u) \geqslant I_n(x)$, decorre que $\psi^*(x,u) \geqslant b$ em ν-quase todo o ponto. Mais uma vez pelo Teorema de Birkhoff, temos $\int \psi^* \, d\nu = \int \psi \, d\nu = b$ e portanto $\psi^* = b$ em ν-quase todo o ponto. Por hipótese, $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x,v) = c$ em ν-quase todo o ponto. Logo $b = c$, ou seja, por definição,

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{u\in P} \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x,v) = c \quad \mu\text{-q.t.p. } x \in X.$$

Notamos que, em geral, para uma probabilidade S-invariante ν' em $\mathcal{M}(\mu)$ qualquer vale $\int \psi \, d\nu' \geqslant b = c$, uma vez mais pelo argumento com o Teorema de Birkhoff acima utilizado. Suponhamos agora que S é invertível (o que é equivalente a T ser invertível), mas não necessariamente sobrejetiva. Convém notar que S^{-1} é também ν-invariante e portanto o conjunto dos pontos para os quais a órbita (positiva) por S^{-1} está definida tem probabilidade ν total - em particular é não vazio, pelo que expressões do tipo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf_{v\in P} \psi^{(-n)}(x,v)$ fazem sentido nalgum conjunto - o mesmo valendo para qualquer outra probabilidade S-invariante. Assim, podemos repetir o raciocínio anterior para S^{-1}, considerando agora $i_n(x) = \inf_{v\in P} \psi^{(-n)}(x,v)$. Analogamente, obtemos uma probabilidade S-invariante ν' tal que

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \inf_{v\in P} \psi^{(n)}(x,v) = \int \psi \, d\nu' \geqslant c \quad \text{q.t.p..}$$

Com um argumento adaptado para $S_n(x) = \sup_{u\in P} \psi^{(n)}(x,v)$, se provaria que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in P} \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x,v) = c \quad \text{q.t.p. e}$$

$$\lim_{n\to-\infty} \sup_{u\in P} \frac{1}{n} \psi^{(n)}(x,v) \leqslant c \quad \text{q.t.p..}$$

Isto conclui a demonstração. □

Nota 3.5. *Se na hipótese do resultado acima colocássemos* $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\psi^{(n)}(x,v) \geqslant c$ *(respetivamente,* $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\psi^{(n)}(x,v) \leqslant c$*), poderíamos concluir* $\lim_{n\to\pm\infty} \inf_{u\in P} \frac{1}{n}\psi^{(n)}(x,v) \geqslant c$ *(respetivamente,* $\lim_{n\to\pm\infty} \sup_{u\in P} \frac{1}{n}\psi^{(n)}(x,v) \leqslant c$*), onde* $n \to -\infty$ *é permitido se* S *for invertível.*

3.4 Fibrado minimal V^k

Após uma digressão geral, retornamos ao Corolário 3.1, que fornecia os expoentes de Lyapunov $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$ e os subespaços $V_x^1 > \cdots > V_x^k$. Para aplicar a teoria desenvolvida na secção precedente, concentramos a nossa atenção no menor expoente $\lambda_{\min}(A) = \lambda_k$ e no fibrado vetorial mensurável $E_x = V_x^k$ que tem dimensão positiva $\dim E = m$. Denotá-lo-emos por *fibrado minimal*. Em virtude do mesmo corolário, E é invariante e temos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_{|E}^{(n)}(x) \cdot v\| = \lambda_{\min}(A), \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } v \in E_x\backslash\{0\}.$$

Na verdade, vale algo mais forte, de acordo com o seguinte

Lema 3.7. *Para quase todo o ponto* $x \in X$ *e todo* $v \in E_x\backslash\{0\}$*, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_{|E}^{(n)}(x) \cdot v\| = \lambda_{\min}(A).$$

Se, adicionalmente, T *for invertível, vale a mesma conclusão também quando* $n \to -\infty$*. Em qualquer caso, a convergência é uniforme sobre* $B_x := \{v \in E_x : \|v\| = 1\}$.

Os expoentes de Lyapunov dependem essencialmente da direção dos vetores da fibra, não da sua magnitude. Por essa razão, para captarmos a informação importante da dinâmica basta-nos olhar para um *espaço de direções*, a saber, o espaço projetivo euclideano $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

Prova: Sem perda de generalidade, podemos assumir $E_x = \mathbb{R}^m$ (ver Nota 3.4). Seja $P = \mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ o espaço projetivo de $\mathbb{R}^m$ e $S : X \times P \to X \times P$ o *cociclo projetivo* sobre T induzido em $X \times P$ por $A_{|E}$, ou seja, o cociclo definido por

$$S(x,[v]) = (T(x), [A_{|E}(x) \cdot v]),$$

onde $[v] \in P$ designa a classe de $v \in \mathbb{R}^m$. Considere-se ainda a função $\psi : X \times P \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x,[v]) = \log \frac{\|A_{|E}(x)\cdot v\|}{\|v\|}$. Note-se que tais funções se encontram bem definidas, i.e., não

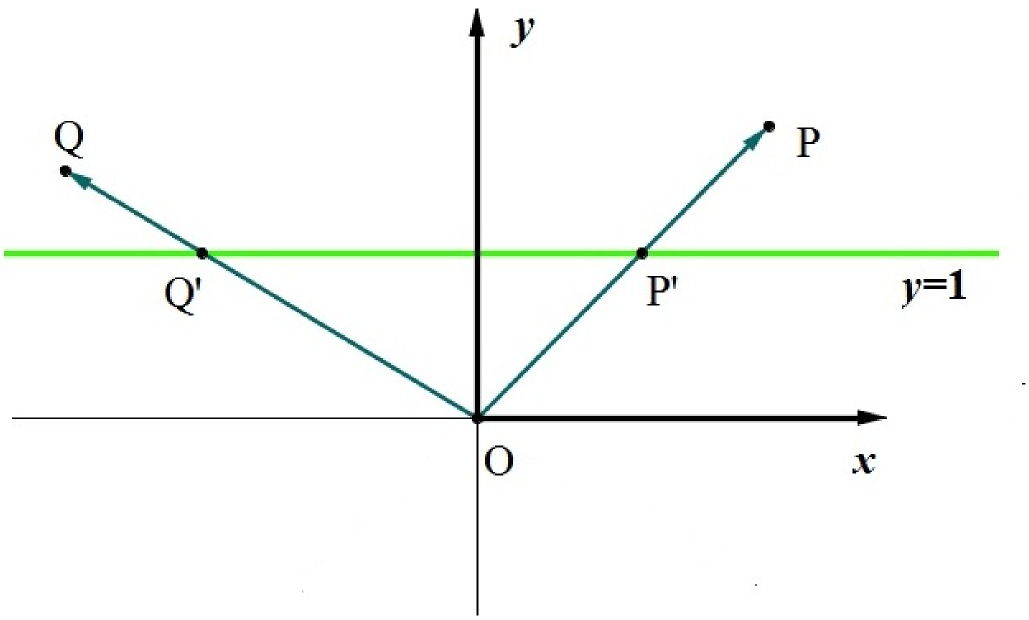

Figura 3.1: ESPAÇO PROJETIVO NO PLANO IDENTIFICADO COM A RETA Y=1

dependem do representante $v \in \mathbb{R}^m$ escolhido. Da igualdade

$$\frac{1}{n}\psi^{(n)}(x,[v]) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{\|A_{|E}^{(j+1)}(x)\cdot v\|}{\|A_{|E}^{(j)}(x)\cdot v\|} = \frac{1}{n}\log\frac{\|A_{|E}^{(n)}(x)\cdot v\|}{\|v\|}$$

retira-se imediatamente que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\psi^{(n)}(x,[v]) = \lambda_{\min}(A), \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } [v] \in P.$$

Pelo Lema 3.6, o limite superior pode ser trocado pelo limite usual. Noutros termos,

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|A_{|E}^{(n)}(x)\cdot v\| = \lambda_{\min}(A), \quad \text{para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } v \in E_x$$

(onde $n \to -\infty$ se T for invertível). Decorre do mesmo lema e do facto do logaritmo ser crescente, a convergência uniforme sobre vetores unitários, traduzida pelas igualdades

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|A_{|E}^{(n)}(x)\| = \lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log m(A_{|E}^{(n)}(x)) = \lambda_{\min}(A).$$

□

Se $k = 1$, a demonstração do teorema terminaria aqui. Em geral, necessitamos de estabelecer a existência dos limites nos restantes fibrados V^j e E^j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Isso será o trabalho das secções seguintes, separando o caso das transformações gerais do das invertíveis.

3.4.1 Expoentes de Lyapunov extremais

Antes de prosseguirmos, faremos uma pequena observação respeitante aos expoentes de Lyapunov extremais $\lambda_{\min}(A) = \lambda_k$ e $\lambda_{\max}(A) = \lambda_1$ e a sua relação com o Teorema de Furstenberg-Kesten (Teorema 1.1), o que será útil futuramente. Com as ideias atrás apresentadas, podemos provar que

Lema 3.8. *Para quase todo o ponto $x \in X$, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) = \lambda_{\min}(A) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x)\| = \lambda_{\max}(A).$$

Prova: Provaremos apenas a primeira igualdade, sendo a outra inteiramente análoga. Pelo Corolário 3.1, já sabemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| \geqslant \lambda_{\min}(A), \quad \text{para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}.$$

Usando a informação contida na Nota 3.5 e as ideias da demonstração do Lema 3.7 que envolvem a redução da dinâmica ao espaço projetivo, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) \geqslant \lambda_{\min}(A), \;\; \text{para q.t.p. } x \in X.$$

Por outro lado, uma vez que $m(A^{(n)}(x)) \cdot \|v\| \leqslant \|A^{(n)}(x) \cdot v\|$, tomando $v \in V_x^k \backslash \{0\}$, decorre

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) \leqslant \lambda_{\min}(A), \;\; \text{para q.t.p. } x \in X.$$

Com isto fica provado o lema. □

Nota 3.6. *Quando T é invertível, valem também as fórmulas*

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log m(A^{(n)}(x)) = \lambda_{\max}(A) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x)\| = \lambda_{\min}(A),$$

uma vez que $m(A^{(n)}(x)) = \|A^{(-n)}(x)\|^{-1}$.

3.5 Crescimento subexponencial

Nesta secção, desenvolveremos técnicas para lidar com informação assintótica do tipo da que é dada pelos expoentes de Lyapunov. Principiamos com a noção quintessencial.

Definição 3.1. Uma função mensurável $\phi : X \to \mathbb{R}$ diz-se ter *crescimento subexponencial* para uma probabilidade μ e uma transformação $T : X \to X$, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\phi \circ T^n = 0 \quad \mu\text{-q.t.p..}$$

A presença de comportamento subexponencial torna certas quantidades negligíveis do ponto de vista da presente teoria, pelo que é útil saber com que frequência isso sucede. Temos a seguinte condição (comparar com a Proposição 2.1, onde é usada uma hipótese mais forte).

Lema 3.9. *Seja $Y \subset X$ um conjunto mensurável T-invariante e $\phi : Y \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $\phi \circ T - \phi$ é semi-integrável. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\phi \circ T^n(x) = 0, \quad \textit{para q.t.p. } x \in Y.$$

Se T for invertível, vale também

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|}\phi \circ T^n(x) = 0, \quad \textit{para q.t.p. } x \in Y.$$

Prova: Seja $\psi = \phi \circ T - \phi$ e denotemos por ψ^* o limite das médias temporais de Birkhoff de ψ. Pelo Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman [A], temos

$$\frac{1}{n}\phi \circ T^n = \frac{1}{n}\phi + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ T^j \to \psi^*, \quad \text{para q.t.p. } x \in Y.$$

Vejamos que $\psi^* = 0$, para quase todo o ponto $x \in Y$. Dado um natural k, considere-se

$$Y_k := \{x \in Y \,:\, |\phi(x)| \leqslant k\}.$$

Claramente, $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$. Pelo Teorema da Recorrência de Poincaré, para quase todo $x \in Y_k$, existem naturais $n_1(x) < n_2(x) < \cdots$ tais que $T^{n_i(x)}(x) \in Y_k (\Leftrightarrow |\phi(T^{n_i(x)}(x))| \leqslant k)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\phi \circ T^n(x) = 0, \quad \text{para quase todo } x \in \textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = Y,$$

o que implica o pretendido. Quando T é invertível, a função $\phi \circ T^{-1} - \phi$ é semi-integrável e portanto aplica-se a argumentação anterior. □

Vamos aplicar o resultado anterior no contexto do Teorema de Oseledets, substanciando a condição de integrabilidade $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$, até agora quase oculta. Usualmente, consideramos $\phi = \log \|A\|$ e funções do tipo

$$C_\epsilon(x) = \sup_{n \geqslant 0} e^{-\epsilon n} \|A^{(n)}(x)\|.$$

O ponto crucial aqui é que na presença de comportamento subexponencial tais funções são finitas q.t.p e, nessas circunstâncias, valem majorações do género

$$\|A^{(n)}(x)\| \leqslant C_\epsilon(x) \cdot e^{\epsilon n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

que nos permitem avaliar o comportamento da norma dos iterados em termos da exponencial. O próximo resultado generalizará um pouco mais estas ideias, onde $M(\mathbb{R}, d)$ designa o conjunto das matrizes quadradas de dimensão d com entradas no corpo dos números reais.

Lema 3.10. *Seja $B : X \to M(\mathbb{R}, d)$ uma aplicação mensurável tal que $\log^+ \|B\| \in L^1(\mu)$. Suponha-se que $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfaz*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x)\| \leqslant \gamma \quad \text{q.t.p..} \tag{3.2}$$

Então para todo $\epsilon > 0$ existe uma função mensurável $b_\epsilon : X \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|B^{(n)}(T^i x)\| \leqslant b_\epsilon(x) \cdot e^{(\gamma+\epsilon)n + \epsilon|i|},$$

para quase todo $x \in X$, todo $n \geqslant 0$ e $i \in \mathbb{N}_0$ ou $i \in \mathbb{Z}$ (se T for invertível).

Nota 3.7. *Sob a hipótese de integrabilidade $\log^+ \|B\| \in L^1(\mu)$, o Teorema Ergódico Subaditivo assegura sempre a existência de um tal $\gamma \in \mathbb{R}$. De facto, como estamos a supor que a probabilidade é ergódica, existe $\theta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x)\| = \theta \text{ q.t.p..}$$

Basta tomar algum $\gamma \geqslant \theta$.

Prova: Seja $\epsilon > 0$ escolhido ao arbítrio e Y o conjunto T-invariante de probabilidade total dos pontos onde vale a hipótese em (3.2). A função $c : Y \to [1, \infty)$ definida por

$$c(x) = \sup_{n \geqslant 0} e^{-(\gamma+\epsilon)n} \|B^{(n)}(x)\|$$

é mensurável. Decorre diretamente da definição que $\|B^{(n)}(x)\| \leqslant c(x)e^{(\gamma+\epsilon)n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$c(x) \leqslant \max\{1, e^{-(\gamma+\epsilon)}\|B(x)\|\} \cdot c(Tx)$$

e portanto, tomando os logaritmos, temos

$$\log c(Tx) - \log c(x) \geqslant -\max\{\log^+ \|B(x)\| - (\gamma + \epsilon), 0\}.$$

Desse modo, $\log c \circ T - \log c$ é integrável em sentido lato e, pelo Lema 3.9, conclui-se que

$$\lim_{i \to \pm\infty} \frac{1}{i} \log c(T^i x) = 0, \text{ para q.t.p. } x \in Y \text{ (ou } x \in X) \tag{3.3}$$

(onde $i \to -\infty$ somente se T for invertível). Por fim, aplicamos a ideia do supremo outra vez: considere-se o conjunto T-invariante de probabilidade total $Z \subset Y$ onde (3.3) vale e defina-se $b_\epsilon : Z \to \mathbb{R}^+$ pela fórmula

$$b_\epsilon(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}} e^{-\epsilon|i|} c(T^i x).$$

Por definição, $c(T^i x) \leqslant b_\epsilon(x) \cdot e^{\epsilon|i|}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$. Assim,

$$\|B^{(n)}(T^i x)\| \leqslant c(T^i x) \cdot e^{(\gamma+\epsilon)n} \leqslant b_\epsilon(x) \cdot e^{(\gamma+\epsilon)n + \epsilon|i|},$$

para quase todo $x \in Z$, todo $n \geqslant 0$ e $i \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$. Extendendo b_ϵ a uma função mensurável definida em X, o resultado segue. $\square$

Nota 3.8. *Quando B não toma valores no conjunto das matrizes quadradas, não podemos falar de $B^{(n)}(x)$ e aplicar estritamente as conclusões do lema anterior. Mas, sob a condição de integrabilidade $\log^+ \|B\| \in L^1(\mu)$, podemos ainda assim assegurar a existência de uma função $b_\epsilon : X \to \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|B(T^i x)\| \leqslant b_\epsilon(x) \cdot e^{\epsilon|i|}, \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } i \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z},$$

ou seja, crescimento subexponencial para $\log \|B\|$.

3.6 Versão unilateral

Nesta secção, vamos provar o Teorema de Oseledets no caso das transformações gerais, não necessariamente invertíveis. Para obtermos os expoentes como limites uniformes nos fibrados V^i diferentes do fibrado minimal $E = V^k$, necessitaremos contudo de mais algumas ferramentas.

Assumiremos, sem perda de generalidade, que a norma em $\mathbb{R}^d$ vem de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma tal suposição permitirá falar de ortogonalidade, uma noção especialmente vantajosa para os cálculos. O panorama geral é o seguinte: consideramos $U = \{U_x\}_{x \in X}$ e $V = \{V_x\}_{x \in X}$ subfibrados mensuráveis A-invariantes de $X \times \mathbb{R}^d$, de dimensão constante, satisfazendo $U_x \subset V_x$ para todo $x \in X$ (ou para todo x num conjunto de probabilidade total). Usando o produto interno, introduzimos o fibrado mensurável $W = \{W_x\}_{x \in X}$ definido como o complemento ortogonal de U em V de modo que $V_x = W_x \ominus U_x$ (soma direta ortogonal) para todo $x \in X$. Note-se que W *não é* de antemão A-invariante. Com respeito a esta decomposição, podemos representar matricialmente $A_{|V}$ por

$$A_{|V} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & A_{|U} \end{pmatrix},$$

representação essa a ser interpretada da seguinte maneira: $B : W \to W$ e $C : W \to U$ são os morfismos induzidos por A através das expressões

$$B = \rho_W \circ A \quad \text{e} \quad C = \rho_U \circ A,$$

onde ρ_W e ρ_U são as projeções ortogonais nos fibrados indexados. Deste modo, B define um novo cociclo e o problema é agora relacionar os expoentes de Lyapunov de B com os de $A_{|V}$. O próximo resultado, baseado em [41], resolve (parcialmente) esta questão, sob a hipótese dos expoentes de Lyapunov serem menores no fibrado U, a situação relevante neste contexto. Adotamos a convenção de designar por u, w e v elementos genéricos de U_x, W_x e V_x, respetivamente.

Lema 3.11. *Seja λ um número real tal que, para quase todo o ponto $x \in X$,*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot u\| \leqslant \lambda, \quad \textit{para todo } u \in U_x\textit{, e}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| > \lambda, \quad \textit{para todo } v \in V_x \backslash U_x.$$

Então, para quase todo o ponto $x \in X$*, tem-se*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot \rho_W(v)\|, \text{ para todo } v \in V_x \backslash U_x. \tag{3.4}$$

Além disso, se existir o limite do lado direito para algum $w = \rho_W(v) \in W_x \backslash \{0\}$*, então existe o limite do lado esquerdo para todo* $v' \in \rho_W^{-1}(w) \subset V_x \backslash U_x$ *e, nesse caso, coincidem.*

Prova: Escrevemos um elemento geral de $V_x \backslash U_x$ por $v = w + u$ para alguns $u = \rho_U(v) \in U_x$ e $w = \rho_W(v) \in W_x \backslash \{0\}$. Começamos por observar que, no conjunto de probabilidade total onde valem as hipóteses do lema, chamemos-lhe Y por conveniência, tem-se

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot (w + u)\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot w\|,$$

devido à propriedade de dominação do maior expoente de Lyapunov (ver Lema 3.3). Assim, para a primeira parte, consideramos apenas o caso em que $u = 0$, i.e., $\rho_W(v) = v$ na igualdade (3.4). Mais precisamente, propomo-nos demonstrar que, para q.t.p. $x \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot w\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot w\|, \text{ para todo } w \in W_x \backslash \{0\}. \tag{3.5}$$

Decorre da definição que $A^{(n)}_{|V}(x) \cdot v = B^{(n)}(x) \cdot w + [C_n(x) \cdot w + A^{(n)}_{|U}(x) \cdot u]$, onde

$$C_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} A^{(n-i-1)}_{|U}(T^{i+1}x) \cdot C(T^i x) \cdot B^{(i)}(x). \tag{3.6}$$

Em particular, $A^{(n)}_{|V}(x) \cdot w = B^{(n)}(x) \cdot w + C_n(x) \cdot w$. Uma vez que $B^{(n)}(x) \cdot w \perp C_n(x) \cdot w$ e estamos a supor que a norma vem do produto interno, decorre do Teorema de Pitágoras a relação $\|A^{(n)}(x) \cdot w\|^2 = \|B^{(n)}(x) \cdot w\|^2 + \|C_n(x) \cdot w\|^2$. Aplicando o Lema 3.2 a esta relação, para todo $x \in X$ e $w \in W_x$, vale

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot w\| = \max\big\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot w\|, \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|C_n(x) \cdot w\| \big\}. \tag{3.7}$$

Seja $(\epsilon_k)_k$ uma qualquer sucessão estritamente decrescente e convergente para 0. Começamos por observar que

$$\|A_{|U}(x)\| \leqslant \|A(x)\| \quad \text{e} \quad \|C(x)\| \leqslant \|A_{|V}(x)\| \leqslant \|A(x)\|,$$

pelo que $\log^+ \|A_{|U}\|, \log^+ \|C\| \in L^1(\mu)$. Assim, pelo Lema 3.10 e pela Nota 3.8 que se lhe segue, para cada natural k, existe um conjunto $Y_k \subset Y$ de probabilidade total e funções mensuráveis $a_k, c_k : X \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$\|A_{|U}^{(n)}(T^i x)\| \leqslant a_k(x) e^{(\epsilon_k+\lambda)n+\epsilon_k i} \quad \text{e} \quad \|C(T^i x)\| \leqslant c_k(x) e^{\epsilon_k i},$$

para todo $x \in Y_k$ e $n, i \geqslant 0$. Afirmamos que para todo $x \in Y_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k$, que tem probabilidade total, vale (3.5). Suponhamos, por redução ao absurdo, que não, i.e.,

$$\tau = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot w\| < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot w\| = \Lambda,$$

para alguns $x \in Y_0$ e $w \in W_x \backslash \{0\}$. Seja $\epsilon_k > 0$ escolhido tal que $\max\{\tau, \lambda\} + 3\epsilon_k < \Lambda$. Definindo $b = b(x, w, \epsilon_k) = \sup_{n\geqslant 0} e^{-(\epsilon_k+\tau)n} \|B^{(n)}(x) \cdot w\| \in \mathbb{R}^+$, temos diretamente

$$\|B^{(n)}(x) \cdot w\| \leqslant b \cdot e^{(\epsilon_k+\tau)n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Para obter uma contradição concentramos agora a atenção em $C_n(x)$ de acordo com a fórmula dada em (3.6), vendo que, num certo sentido, é demasiado pequeno. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|C_n(x) \cdot w\| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|A_{|U}^{(n-i-1)}(T^{i+1}x)\| \cdot \|C(T^i x)\| \cdot \|B^{(i)}(x) \cdot w\| \\
&\leqslant n \cdot \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} \|A_{|U}^{(n-i-1)}(T^{i+1}x)\| \cdot \|C(T^i x)\| \cdot \|B^{(i)}(x) \cdot w\| \\
&\leqslant n \cdot d_1(x) \cdot \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} e^{(\epsilon_k+\lambda)(n-i-1)+\epsilon_k(i+1)} e^{\epsilon_k i} e^{(\epsilon_k+\tau)i} \\
&= n \cdot d_1(x) \cdot \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} e^{\epsilon_k(n+2i)} e^{(n-i-1)\lambda+\tau i} \\
&\leqslant n \cdot d_2(x) \cdot e^{3\epsilon_k n} \cdot \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} e^{(n-i-1)\lambda+\tau i} \\
&\leqslant n \cdot d_3(x) \cdot e^{3\epsilon_k n} \cdot e^{\max\{\lambda,\tau\}n} \\
&= n \cdot d_3(x) \cdot e^{(\max\{\lambda,\tau\}+3\epsilon_k)n}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|C_n(x) \cdot w\| \leqslant \max\{\lambda, \tau\} + 3\epsilon_k < \Lambda.$$

Isto contradiz (3.7) e assim fica provado (3.5) (e por conseguinte (3.4)). Para finalizar, veremos a questão dos limites. Usando outra vez o Teorema de Pitágoras e o Lema 3.2, segue que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| &\geqslant \max\Big\{ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot w\|, \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D_n(x) \cdot v\| \Big\} \\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot w\|,
\end{aligned}$$

onde $D_n(x) \cdot v = C_n(x) \cdot w + A^{(n)}_{|U}(x) \cdot u$. Juntando este facto ao que provamos, conclui-se a segunda parte do teorema. □

Estamos agora em condições de concluir a versão unilateral do Teorema de Oseledets. Considere-se o fibrado minimal $E = V^k$ introduzido anteriormente e seja $E^{\perp}$ o ortogonal de E de modo que $E^{\perp}_x$ é o complemento ortogonal de E_x em $\mathbb{R}^d$. Como vimos, temos uma representação

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & A_{|E} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

onde A induz em $E^{\perp}$ um cociclo $B(x) : E^{\perp}_x \to E^{\perp}_{Tx}$. Pelo Lema 3.11, os expoentes de Lyapunov para B (no sentido do Corolário 3.1) são precisamente

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_{k-1},$$

com a correspondente filtração de Oseledets $V^1 \cap E^{\perp} > \cdots > V^{k-1} \cap E^{\perp}$. Olhemos para o fibrado minimal $E' = V^{k-1} \cap E^{\perp}$ do cociclo B, bem como o menor expoente $\lambda_{\min}(B) = \lambda_{k-1}$. Uma vez que $\|B(x)\| \leqslant \|A(x)\|$ e $\|B(x)^{-1}\| \leqslant \|A(x)^{-1}\|$, podemos aplicar os resultados da Secção 3.4 para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}_{|E'_x}(x) \cdot v\| = \lambda_{k-1}, \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } v \in E'_x \backslash \{0\}.$$

É claro que $V^{k-1} = E' \oplus E$ e decorre assim do Lema 3.11, aplicado a $V = V^{k-1}$ e $U = E$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \lambda_{k-1}, \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } v \in V^{k-1}_x \backslash E.$$

A prova da versão unilateral do Teorema de Oseledets segue por indução, repetindo, sempre que necessário (no máximo um número finito de vezes), este argumento.

3.7 Versão bilateral

Nesta secção, demonstraremos o Teorema de Oseledets para as transformações invertíveis $T : X \to X$. Numa primeira instância, poderíamos tentar adaptar a prova das transformações gerais considerando, por exemplo, no primeiro passo da indução, $E^{k-1} = E'$. O problema com tal abordagem é que o fibrado minimal E' não é necessariamente A-invariante, tal como é exigido no enunciado do teorema. Surge deste modo a motivação para o seguinte resultado, originário de [24], onde, por simplicidade de notação, $F = X \times \mathbb{R}^d$.

Lema 3.12. *Se $E \neq F$, existe um subfibrado mensurável G de F tal que*

1. $A(x) \cdot G_x = G_{Tx}$*, para q.t.p.* $x \in X$*, e*
2. $G \oplus E = F$.

Prova: Denotamos por $\mathcal{L}$ o espaço dos morfismos $L : E^{\perp} \to E$ tais que as aplicações

$$L(x) : E_x^{\perp} \to E_x$$

são lineares e dependem de forma mensurável de x. O *gráfico* de $L \in \mathcal{L}$ é o subfibrado mensurável H^L cuja fibra sobre x é definida por

$$H_x^L = \{L(x) \cdot v + v \, : \, v \in E_x^{\perp}\}.$$

Note-se que se trata de um subfibrado complementar a E. Definimos a *imagem* de um subfibrado G como o subfibrado cuja fibra sobre x é $A(T^{-1}x) \cdot G_{T^{-1}x}$, de modo que um fibrado A-invariante coincide com a sua imagem. Seja $\Gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ a *transformação gráfico* dada por

$$\Gamma(L)(x) = D(x) + \Phi(L)(x),$$

onde $D(x) = C(T^{-1}x) \cdot [B(T^{-1}x)]^{-1}$ e a aplicação $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ é definida pela expressão $\Phi(L)(x) = A(T^{-1}x) \cdot L(T^{-1}x) \cdot [B(T^{-1}x)]^{-1}$, com o significado de (3.8). O ponto chave nesta transformação é que a imagem do gráfico de L é o gráfico de $\Gamma(L)$.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\Gamma} & \Gamma(L) \\ {\scriptstyle Grafico}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle Grafico} \\ H^L & \xrightarrow{Imagem} & H^{\Gamma(L)} \end{array}$$

Demonstraremos que Γ tem um ponto fixo q.t.p., ou seja, existe um elemento L tal que $\Gamma(L)(x) = L(x)$, para quase todo o ponto $x \in X$. O gráfico desse ponto fixo será um subfibrado mensurável A-invariante (q.t.p.) complementar a E, como desejado. Para isso, provaremos que existem uma função mensurável $a : X \to \mathbb{R}$ e um número real $\tau > 0$ tais que

$$\|\Phi^n(D)(x)\| \leqslant a(x) \cdot e^{-\tau n}, \quad \text{para q.t.p. } x \text{ e todo } n \geqslant 0.$$

Com isso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D)$ converge em quase todo ponto para um elemento $L \in \mathcal{L}$ que fica fixo (q.t.p.) pela transformação gráfico pois

$$\Gamma(L) = D + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^n(D) = L.$$

Temos $\Phi^n(L)(x) = A^{(n)}_{|E}(T^{-n}x) \cdot L(T^{-n}x) \cdot B^{(-n)}(x)$ e em particular, quando $L = D$,

$$\|\Phi^n(D)(x)\| \leqslant \|A^{(n)}_{|E}(T^{-n}x)\| \cdot \|D(T^{-n}x)\| \cdot \|B^{(-n)}(x)\|.$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $-\lambda_{k-1} + \lambda_k + 4\epsilon < 0$. Majoremos cada um dos fatores no lado direito. Pelo Lema 3.10, existe uma função mensurável $a_1 : X \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|A^{(n)}_{|E}(T^{-n}x)\| \leqslant a_1(x)e^{n(\lambda_k+2\epsilon)}, \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } n \geqslant 0.$$

Note-se que $\log^+ \|D\|$ é integrável pois

$$\begin{aligned} \log^+ \|D(x)\| &\leqslant \log^+ \|C(T^{-1}x)\| + \log^+ \|B(T^{-1}x)^{-1}\| \\ &\leqslant \log^+ \|A(T^{-1}x)\| + \log^+ \|A(T^{-1}x)^{-1}\| \end{aligned}$$

e portanto, outra vez pelo Lema 3.10, existe uma função mensurável $a_2 : X \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|D(T^{-n}x)\| \leqslant a_2(x)e^{\epsilon n}, \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } n \geqslant 0.$$

Para finalizar, temos de majorar $\|B^{(-n)}(x)\|$. Pelo Lema 3.8 e a nota que se lhe segue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(-n)}(x)\| = -\lambda_{\min}(B), \text{ para q.t.p. } x \in X.$$

Dado que $\log^+ \|B^{-1}\| \leqslant \log^+ \|A^{-1}\|$, podemos aplicar o Lema 3.10 agora ao cociclo B^{-1} sobre T^{-1} e obter uma função mensurável $a_3 : X \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|B^{(-n)}(x)\| \leqslant a_3(x)e^{(-\lambda_{k-1}+\epsilon)n}, \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } n \geqslant 0$$

(recordamos que $\lambda_{\min}(B) = \lambda_{k-1}$). Estamos agora em condições de majorar $\|\Phi^n(D)(x)\|$. Com efeito,

$$\|\Phi^n(D)(x)\| \leqslant (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)(x)e^{(-\lambda_{k-1}+\lambda_k+4\epsilon)n}, \text{ para q.t.p. } x \in X \text{ e todo } n \geqslant 0,$$

tal como pretendíamos, e assim fica concluída a demonstração do lema. □

Concluimos agora a demonstração do Teorema de Oseledets para as transformações invertíveis. Considere-se o fibrado minimal $E^k = V^k$ dado pelo Corolário 3.1. Se $k = 1$, nada mais há a demonstrar, em virtude do Lema 3.7 (note-se que o mesmo assegura convergência uniforme sobre $B_x = \{v \in E^k_x : \|v\| = 1\}$). De outro modo, pelo Lema 3.12, existe um subfibrado mensurável A-invariante G que é complementar a E^k. Os expoentes de Lyapunov para o cociclo $A_{|G}$ no sentido do Corolário 3.1 são precisamente $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{k-1}$, com a correspondente filtração de Lyapunov

$$V^1 \cap G > \cdots > V^{k-1} \cap G.$$

Definindo $E^{k-1} = V^{k-1} \cap G$, podemos reaplicar o mesmo argumento, e assim a prova da versão bilateral segue por indução a menos de termos verificado o ponto 3 referente aos ângulos entre os subespaços de Oseledets e a unicidade dos mesmos. Assumimos a unicidade, deixando a sua verificação para o fim.

3.7.1 Ângulos entre os subespaços de Oseledets

Seja $\mathbb{R}^d = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^{k(x)}$ a decomposição de Oseledets de um ponto regular $x \in X$. Os ângulos entre os espaços invariantes da decomposição de Oseledets apresentam comportamento subexponencial, no sentido da seguinte proposição.

Proposição 3.4. *Para quase todo o ponto $x \in X$,*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \sin \measuredangle\Big(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} E^i_{T^n x}, \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} E^j_{T^n x}\Big) = 0, \quad \textit{sempre que } \mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \varnothing.$$

Nota 3.9. *Se $k = 1$, a proposição é trivialmente satisfeita pois assumimos que $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são não vazios (o que torna a condição vazia).*

Deduziremos esta proposição do Lema 3.9 e do seguinte facto de Álgebra Linear/Geometria Analítica.

Proposição 3.5. *Seja $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma transformação linear invertível e v, w vetores não-nulos. Então*

$$\frac{1}{\|L\| \cdot \|L^{-1}\|} \leqslant \frac{\sin \measuredangle(Lv, Lw)}{\sin \measuredangle(v, w)} \leqslant \|L\| \cdot \|L^{-1}\|.$$

Prova: Recordamos que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\|w + \alpha v\| \geqslant \|w\| \sin \measuredangle(v, w)$, com igualdade quando $\alpha = \langle v, w\rangle / \|v\|^2$.

Seja $\beta = \langle Lv, Lw\rangle / \|Lv\|^2$ e $z = w + \beta v$. Pela observação anterior, temos por um lado $\|z\| \geqslant \|w\| \sin \measuredangle(v, w)$ e por outro $\|Lz\| = \|Lw\| \sin \measuredangle(Lv, Lw)$. Logo

$$\sin \measuredangle(Lv, Lw) = \frac{\|Lz\|}{\|Lw\|} \geqslant \frac{\|L^{-1}\|^{-1} \cdot \|z\|}{\|L\| \cdot \|w\|} \geqslant \frac{\sin \measuredangle(v, w)}{\|L\|\|L^{-1}\|},$$

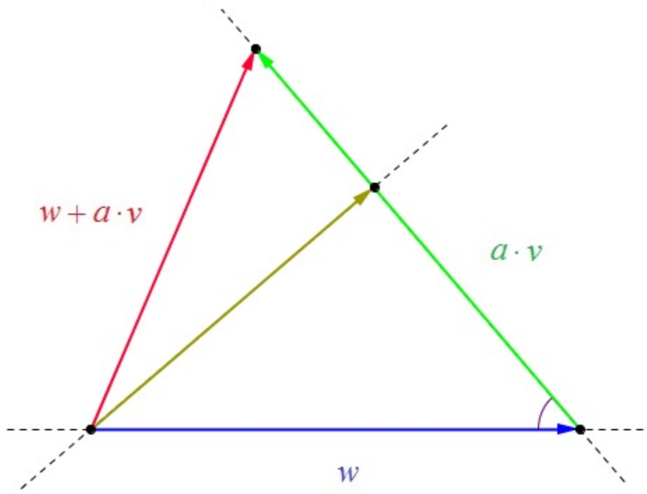

Figura 3.2: DESIGUALDADE

o que prova a primeira desigualdade. A outra é análoga escolhendo $\beta = \langle v, w \rangle / \|v\|^2$. $\square$

Estamos agora em condições de provar a Proposição 3.4.

Prova: Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ dois subconjuntos disjuntos não vazios de $\{1, \ldots, k\}$. Seja Y o conjunto T-invariante de probabilidade total de pontos regulares cuja existência foi provada. A função $\phi : Y \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = \log \sin \sphericalangle(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} E_x^i, \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} E_x^j)$ é mensurável. Pela Proposição 3.5,

$$|\phi(Tx) - \phi(x)| \leqslant \log^+ \|A(x)\| + \log^+ \|A(x)^{-1}\|$$

e portanto, pela condição de integrabilidade do Teorema de Oseledets, a função $\phi \circ T - \phi$ é integrável. Pelo Lema 3.9, temos $\phi(T^n x)/n \to 0$, para quase todo ponto $x \in Y$ (ou $x \in X$). Isto conclui a demonstração. $\square$

3.7.2 Unicidade das decomposições de Oseledets

Por fim, complementamos este estudo com a verificação da unicidade das decomposições de Oseledets, num âmbito um pouco mais geral do que o do teorema (i.e., mostramos também a unicidade dos expoentes em x, do qual, em geral, dependem). Sejam $\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_k(x)$ os expoentes de Lyapunov e

$$\mathbb{R}^d = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^k$$

uma decomposição de Oseledets de um ponto regular $x \in X$. Note-se que

$$\{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_k(x)\} = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, \lambda = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| \text{ para algum } v \in \mathbb{R}^d\}$$

e portanto os expoentes de Lyapunov estão unicamente determinados. Detalhamos um pouco mais a unicidade dos subespaços. Dado um vetor arbitrário $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, escrevemos $v = \sum_{i=1}^k v_i$, onde $v_i \in E_x^i$. Pela propriedade de dominação do maior expoente (ver Lema 3.3), temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \lambda_m(x),$$

onde m é o menor índice i tal que $v_i \neq 0$. Por um raciocínio análogo,

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \lambda_M(x),$$

onde M é o maior índice i tal que $v_i \neq 0$. Logo,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| \Leftrightarrow m = M \Leftrightarrow v \in E_x^i, \text{ para algum } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Daqui segue a unicidade das decomposições.

Apêndice A

Medida e Integração

Neste apêndice, mencionamos as definições e ferramentas básicas da Teoria da Medida e Integração. Não faremos uma exposição exaustiva, mas somente aquela que achamos oportuna sem, regra geral, incluirmos demonstrações. Os textos principais que recomendamos como base e complemento ao que aqui se apresenta são [1], [8] e [27], sendo o intermédio o mais abrangente neste tópico.

A.1 Espaços mensuráveis

Ao longo deste apêndice, X designa um conjunto e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos (*partes*) de X.

Definição A.1. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ*-álgebra* de X, se forem satisfeitas as seguintes condições:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. se $A \in \mathcal{A}$, então $X \backslash A \in \mathcal{A}$ e
3. se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, então $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Fica claro da sua definição que qualquer σ-álgebra $\mathcal{A}$ é uma coleção não vazia que contém X. Por completude, citaremos mais algumas das propriedades de fecho satisfeitas por σ-álgebras, que se podem deduzir das acima enunciadas.

Proposição A.1. *Sejam* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *elementos de* $\mathcal{A}$. *Então*

$$A_i \backslash A_j, \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ e } \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

são ainda elementos de $\mathcal{A}$.

Por exemplo, $\{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$ são trivialmente σ-álgebras de qualquer conjunto X e são, respetivamente, a menor e a maior no sentido de inclusão. É facto elementar que a interseção arbitrária de σ-álgebras é ainda uma σ-álgebra. Estas duas observações motivam a seguinte definição.

Definição A.2. Dada uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, definimos a *σ-álgebra gerada* por $\mathcal{C}$ como a interseção (não vazia) de todas as σ-álgebras que contem $\mathcal{C}$ ou, equivalentemente, como a menor σ-álgebra que contem $\mathcal{C}$ no sentido da inclusão.

Um exemplo que merece especial destaque são as σ-álgebras definidas em espaços topológicos.

Exemplo A.1. Se X for um espaço topológico, designamos por *σ-álgebra de Borel* a σ-álgebra gerada pelos subconjuntos abertos (ou fechados) de X. Os seus elementos designam-se por *borelianos*. Por definição, qualquer aberto é um boreliano, mas em geral não vale o recíproco, i.e., a topologia está contida (estritamente, em geral) na σ-álgebra de Borel.

Quando $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X, dizemos que o par $(X, \mathcal{A})$ é um *espaço mensurável*, e aos elementos de $\mathcal{A}$ chamamos *conjuntos mensuráveis*.

A.2 Espaços de medida

Os espaços mensuráveis são os ambientes ideais para se definir aquilo que se entende por uma medida.

Definição A.3. Uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ diz-se uma *medida*, se forem válidas as seguintes condições:

1. $\mu(\varnothing) = 0$ e

2. $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ sempre que os conjuntos A_i forem dois a dois disjuntos.

A propriedade (2) é conhecida como a σ-*aditividade* da medida. O conceito de medida pode ainda englobar valores negativos (medidas com sinal), mas isso não é objeto da presente dissertação.

Exemplo A.2. Seja X um conjunto qualquer e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ a σ-álgebra das partes de X. Fixado $p \in X$, considere-se a função $\delta_p : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ definida por

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; p \in A \\ 0 & \text{se } \; p \notin A \end{cases}.$$

Esta função define uma medida conhecida como a *medida de Dirac* concentrada em p.

Há dois tipos de medidas que assumem um papel de relevo na teoria: um deles são as *medidas finitas* - aquelas que satisfazem $\mu(X) < \infty$ - com especial ênfase para as *medidas de probabilidade*, i.e., aquelas que satisfazem $\mu(X) = 1$; o outro são as medidas σ-*finitas*, ou seja, aquelas para as quais existe uma sucessão de subconjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tais que $\mu(A_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. É frequente em aplicações provar certos resultados para medidas finitas e depois extendê-los para medidas σ-finitas. É possível provar da definição que qualquer medida satisfaz as propriedades seguintes:

Proposição A.2. *Sejam $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Então*

1. *se $A_i \subset A_j$, então $\mu(A_i) \leqslant \mu(A_j)$ (monotonia);*
2. *se $A_1, \ldots, A_n$ são dois a dois disjuntos, então $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ (aditividade);*
3. *$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (σ-subaditividade);*
4. *se $A_j \subset A_{j+1}$, então $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_i)$ (continuidade);*
5. *se $A_j \supset A_{j+1}$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_i)$ (continuidade).*

O próximo resultado, conhecido como o *Lema de Borel-Cantelli*, é muito usado em Teoria das Probabilidades e deduz-se das propriedades acima.

Teorema A.1. *Seja μ uma probabilidade definida numa σ-álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos de X, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de conjuntos mensuráveis e*

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

o conjunto dos pontos $x \in X$ que pertencem a A_n para infinitos valores de n. Nestas hipóteses, se $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$, então $\mu(A) = 0$.

Dizemos que uma propriedade é *típica ou genérica* em X (do ponto de vista da medida) se vale em μ-quase todo o ponto (abreviado para μ-q.t.p.), i.e., o conjunto dos pontos onde ela não vale tem medida nula. Conjuntos de medida total são nesta perspetiva os conjuntos *grandes*. Isto é o análogo do caso topológico, em que as propriedades típicas (ou genéricas) são aquelas que valem numa interseção numerável de abertos densos (conjuntos residuais ou genéricos) que, como se sabe, é ainda densa em espaços de Baire. Conjuntos de medida nula, também ditos *conjuntos nulos*, desempenham um papel análogo aos conjuntos de *primeira categoria de Baire*, onde se incluem os complementares dos residuais, no sentido em que são ambos pequenos nas respetivas óticas. Salientamos que estas noções de generecidade não são em geral coincidentes, no caso em que a estrutura mensurável é compatível com a topológica, como se pode constatar no conjunto dos pontos regulares de certos difeomorfismos.

Definição A.4. Dizemos que o terno $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um *espaço de medida*, quando μ é uma medida definida na σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X.

Exemplo A.3. Dados dois espaços de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, existe uma estrutura natural de espaço de medida no produto $X \times Y$ munido com a σ-álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e medida $\mu \otimes \nu$ produtos (ver a construção em [1], [8] ou [27]). Em particular,

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B), \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}.$$

Exemplo A.4. Um espaço de medida importante é aquele em que $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}$ a σ-álgebra dos borelianos e $\mu = \lambda$ a medida de Lebesgue (ver [1], [8] ou [27] para a sua construção). Na verdade, a medida de Lebesgue pode ser estendida coerentemente a uma família estritamente maior do que a classe dos borelianos, dita a classe dos conjuntos *mensuráveis de Lebesgue*.

Definição A.5. Um espaço de medida diz-se *completo*, se todo o subconjunto de um conjunto nulo é também mensurável.

Todo o espaço de medida pode ser transformado num espaço completo, através dum processo conhecido como o *completamento* (de Lebesgue) (ver descrição em [8]).

Exemplo A.5. O espaço do exemplo A.4 munido com a σ-álgebra dos conjuntos *Lebesgue-mensuráveis* é o completado do mesmo espaço munido com a σ-álgebra dos borelianos.

Usamos a notação $\mathcal{A}_\mu$ para a σ-álgebra completada de $\mathcal{A}$ em relação à medida μ. Introduzimos agora a noção de equivalência natural entre espaços de medida (ver [8]).

Definição A.6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida. Um *isomorfismo pontual* entre estes espaços é uma bijeção $T : X \to Y$ tal que

- $T(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, ou seja, $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ são equivalentes, sempre que $T(A) = B$, e
- $\mu \circ T^{-1}(B) = \nu(B)$, para todo $B \in \mathcal{B}$.

Como frequentemente estamos apenas preocupados com o que acontece em subconjuntos de probabilidade total, a seguinte noção de isomorfismo revela-se a mais adequada.

Definição A.7. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida. Estes espaços dizem-se *isomorfos mod 0* se existirem conjuntos $N \in \mathcal{A}_\mu$ e $M \in \mathcal{B}_\nu$ com $\mu(N) = \nu(M) = 0$ e um isomorfismo pontual $T : X \backslash N \to Y \backslash M$, onde $X \backslash N$ e $Y \backslash M$ se encontram munidos com as restrições de μ, ν e das σ-álgebras $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{B}_\nu$ respetivamente.

Assim, o intuito é classificar os espaços de medida a menos de isomorfismo. Uma classe muito importante de espaços de probabilidade foi estudada por V. Rohlin que lhes chamou espaços de Lebesgue. A definição que apresentamos é já consequência de definições mais intrínsecas destes espaços, mas, em termos práticos, uma das mais vulgares.

Definição A.8. Um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ diz-se um *espaço de Lebesgue-Rohlin* se for isomorfo mod 0 ao intervalo $[0, 1]$ com a medida $\nu = c\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{1/n}$, onde $c = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n = \mu(a_n)$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é a família dos átomos de μ (i.e., pontos com medida positiva).

Poderíamos tomar como modelo de espaço de Lebesgue qualquer espaço métrico compacto com uma probabilidade boreliana (completada), e mais geralmente qualquer espaço de Haussdorff separável e localmente compacto (ver [17], pp. 759).

A.3 Funções mensuráveis

As funções mensuráveis desempenham na Teoria de Medida um papel semelhante ao que as funções contínuas desempenham na Topologia, paralelo já evidente na sua definição.

Definição A.9. Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dois espaços mensuráveis. Uma função $f : X \to Y$ diz-se $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*mensurável* (ou simplesmente *mensurável* se as σ-álgebras estiverem subentendidas), se

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Para aqui, interessará especialmente o caso em que $Y = \mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) e $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra dos borelianos (eventualmente acrescentados com $\{\pm\infty\}$ na quando $Y = \overline{\mathbb{R}}$). Nesse caso, a mensurabilidade de f é equivalente à mensurabilidade dos conjuntos $f^{-1}((-\infty, c])$ para $c \in \mathbb{R}$. O próximo exemplo introduz uma classe importante de funções mensuráveis, uma das mais simples depois das funções constantes.

Exemplo A.6. Dado um conjunto $B \subset X$, definimos a função caraterística de B por

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases}.$$

Note-se que χ_B é mensurável se e somente se B for mensurável pois, para todo $A \subset \mathbb{R}$, temos $\chi_B^{-1}(A) \in \{\varnothing, B, X \backslash B, X\}$.

Listamos algumas das propriedades mais importantes de que fizemos uso implicitamente ao longo do texto.

Proposição A.3. *Sejam $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ funções mensuráveis e $a, b \in \mathbb{R}$. Então são mensuráveis*

$$(af + bg)(x) := af(x) + bg(x) \text{ e } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Além disso, se $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ for uma sucessão de funções mensuráveis, são ainda mensuráveis as funções

$$s(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad i(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x),$$

$$\overline{f}(x) := \limsup_{n \to \infty} f_n(x) \text{ e } \underline{f}(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$$

Em particular, se $f(x) = \lim_n f_n(x)$ existir, então é mensurável.

Segue da proposição anterior, a mensurabilidade da seguinte classe de funções que extende as funções caraterísticas, também ela muito importante.

Exemplo A.7. Uma função $s : X \to \mathbb{R}$ diz-se *simples*, se existirem constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e conjuntos mensuráveis mutuamente disjuntos $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ tais que

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

No sentido inverso, toda a função mensurável é limite de uma sucessão de funções simples, de acordo com a seguinte

Proposição A.4. *Seja $f : X \to [-\infty, \infty]$ uma função mensurável. Então existe uma sucessão de funções simples $(s_n)_n$ tais que $|s_n| \leqslant |f|$, para todo n, e*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Se f é não-negativa, podemos tomar $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant f$.

A.4 Integração

Faremos aqui uma breve revisão da contrução da integral de Lebesgue, que pode ser vista nas fontes citadas no início deste apêndice. Principiamos pela definição da integral nas funções simples, extendendo-a progressivamente às funções mensuráveis. Mantemo-nos no ambiente dum espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Definição A.10. Seja $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ uma função simples. Define-se a integral (de Lebesgue) de s em relação a μ como

$$\int s \, d\mu = \sum_{i=i}^{k} \alpha_i \mu(A_i).$$

Usando a Proposição A.4, podemos extender coerentemente esta definição de integral para funções mensuráveis não-negativas.

Definição A.11. Seja $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável não negativa. Define-se a integral de f por

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu,$$

onde $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots$ é uma sucessão não decrescente de funções simples tais que $\lim_n s_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

No sentido de lidarmos com uma função mensurável $f : X \to [-\infty, \infty]$ geral, definimos as funções f^+ e f^- por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad e \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Estas funções são não-negativas, por definição, e mensuráveis pela Proposição A.3 .

Definição A.12. Seja $f : X \to [-\infty, \infty]$ uma função mensurável. Define-se a integral de f por

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- d\mu,$$

desde que pelo menos uma das integrais do lado direito seja finita, com as convenções usuais $\infty - a = \infty$ e $a - \infty = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definição A.13. Dizemos que uma função $f : X \to [-\infty, \infty]$ é integrável, se for mensurável e a sua integral for um número real.

Uma função f tal que f^+ ou f^- é integrável diz-se *semi-integrável*, ou *quasi-integrável*, ou ainda *integrável em sentido lato* (esta é a classe de funções para a qual faz sentido falar da integral tal como a definimos acima). Denotamos o conjunto das funções integráveis por $\mathcal{L}^1(\mu)$. Este espaço tem uma estrutura de espaço vetorial real e um conjunto de outras propriedades que sumariamos no seguinte resultado.

Proposição A.5. *O espaço $\mathcal{L}^1(\mu)$ das funções integráveis é um espaço vetorial real. A aplicação $I : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}$ definida neste espaço por $I(f) = \int f \, d\mu$ é um funcional linear positivo, ou seja:*

- $\int af + bg \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu$ *e*
- *se $f \geqslant g$, então $\int f \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$.*

Em particular, $|\int f \, d\mu| \leqslant \int |f| d\mu$, se $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Além disso, $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ se, e somente se, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Podemos estar interessados em integrar apenas numa *região* do domínio X. Dada uma função mensurável $f : X \to [-\infty, \infty]$ e um conjunto mensurável E, definimos a integral de f sobre E por

$$\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu.$$

Viramos agora a nossa atenção para resultados de integração particularmente úteis. Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $f : X \to Y$ uma aplicação mensurável. Dada uma medida μ em $\mathcal{A}$, a fórmula

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \text{ para todo } B \in \mathcal{B},$$

define uma medida em $\mathcal{B}$ chamada a *imagem (pullback) da medida* μ pela aplicação f. Temos o seguinte teorema de *mudança de variável*.

Teorema A.2. *Uma função mensurável $g : Y \to \mathbb{R}$ é integrável com respeito à medida $f_*\mu$ se e somente se a função $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é integrável com respeito a μ. Além disso, tem-se*

$$\int_Y g \, df_*\mu = \int_X g \circ f \, d\mu.$$

Temos ainda o seguinte *critério de integrabilidade*.

Proposição A.6. *Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma transformação mensurável. Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |\phi(x)| \geqslant n\}) \leqslant \int |\phi| \, d\mu \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |\phi(x)| \geqslant n\}.$$

Em particular, ϕ é integrável se, e somente se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |\phi(x)| \geqslant n\})$ for convergente.

A.5 Teoremas de convergência

Os próximos resultados são muito importantes para estudar questões de convergência de funções sob integrais.

Teorema A.3. (Lema de Fatou) *Seja $\phi_n : X \to [0, \infty]$ uma sucessão de funções mensuráveis não negativas. Então*

$$\int \liminf_{n\to\infty} \phi_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\mu.$$

Teorema A.4. (Convergência Monótona) *Seja $\phi_n : X \to [0, \infty]$ uma sucessão de funções mensuráveis não negativas tal que $\phi_i \leqslant \phi_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então*

$$\int \lim_{n\to\infty} \phi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\mu.$$

Teorema A.5. (Convergência Dominada) *Seja $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções mensuráveis que converge, em μ-quase todo o ponto, para ϕ. Suponhamos que existe uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que $|\phi_n(x)| \leqslant |g(x)|$, para μ-quase todo o $x \in X$. Então ϕ é integrável e vale*

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\mu = \int \phi \, d\mu.$$

A.6 Espaços $L^p(\mu)$

Para $1 \leqslant p < \infty$, definimos o espaço $\mathcal{L}^p(\mu)$ como o conjunto das funções mensuráveis $f : X \to [-\infty, \infty]$ tais que $|f|^p$ é integrável. Este espaço possui uma relação de equivalência natural

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \text{ para } \mu\text{-q.t.p. } x \in X.$$

de modo que funções numa mesma classe possuem a mesma integral. Esta relação permite ainda definir a integral de funções não necessariamente mensuráveis, conquanto coincidam q.t.p com uma tal função.

Definição A.14. Dado $p \in [1, \infty)$, definimos o espaço $L^p(\mu)$ pelo quociente $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$.

Em termos práticos pensamos nos elementos de $L^p(\mu)$ simplesmente como funções (i.e., elementos de $\mathcal{L}^p(\mu)$), o que é formalmente incorreto, mas conveniente. Mais uma vez, os espaços $L^p(\mu)$ tem uma estrutura de espaço vetorial. A função $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \int |f|^p \, d\mu$$

define uma norma nestes espaços. Além disso, a norma é completa pelo que

Proposição A.7. $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *é um espaço de Banach.*

Observe-se que em $\mathcal{L}^p(\mu)$ a norma acima passaria a ser uma *pseudo-norma*, sendo esta uma das razões pela qual se toma o quociente.

A.7 Medidas em espaços métricos

Neste trabalho, usamos frequentemente medidas em espaços métricos compactos. Deixamos aqui dois resultados relativos à existência de *partições da unidade* e da densidade de funções contínuas nos espaços $L^p(\mu)$, não apresentados no âmbito mais geral, mas somente para o que nos interessa presentemente. Foram retirados de [1], que contem versões mais gerais.

Proposição A.8. *Seja X um espaço métrico compacto. Se $U_1, \ldots, U_n$ forem conjuntos abertos tais que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$, então existem $h_1, \ldots, h_n \in C^0(X)$ tais que $0 \leqslant h_i \leqslant \chi_{U_i}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, e $h_1(x) + \cdots + h_n(x) = 1$, para todo $x \in X$.*

Proposição A.9. *Seja X um espaço métrico compacto e μ uma probabilidade nos borelianos de X. Então $C^0(X)$ é denso em $L^p(\mu)$, para $1 \leqslant p < \infty$.*

Apêndice B

Teoria Ergódica

É objetivo do presente apêndice fornecer algumas bases rudimentares de Teoria Ergódica. O texto que mais recomendamos como base e complemento ao que aqui expomos é [27].

B.1 Medidas invariantes

A Teoria Ergódica estuda sistemas dinâmicos que preservam alguma medida. Eis o que matematicamente se entende por isso, no contexto das transformações.

Definição B.1. Uma medida μ diz-se *invariante* para uma transformação mensurável $T : X \to X$, se, para todo o conjunto mensurável $A \in \mathcal{A}$, for válida a igualdade

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Uma vez que T é mensurável, $T^{-1}(A)$ é um conjunto mensurável sempre que A o for, pelo que a definição acima tem sentido. Isto poderia ser reformulado em termos de pontos fixos do pullback atrás introduzido, dizendo que $T_*\mu = \mu$. Do Teorema A.2, decorre o seguinte critério de invariância

Proposição B.1. *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade em X. Então T preserva μ se, e somente se,*

$$\int \phi \, d\mu = \int \phi \circ T \, d\mu,$$

para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$.

Durante o texto mencionamos a topologia fraca*. Uma boa descrição desta topologia (através da Análise funcional: espaços duais, Teorema da Representação de Riesz, Teorema de Banach-Alaoglu, etc.) é feita em [27]. De facto, a partir dum argumento de ponto fixo do pullback nesta topologia, pode-se deduzir o seguinte teorema.

Teorema B.1. (Krylov-Bogolubov) *Qualquer transformação contínua de um espaço métrico compacto possui alguma medida de probabilidade de Borel invariante.*

B.2 Ergodicidade

O espaço das probabilidades invariantes por T possui uma estrutura natural de espaço vetorial real convexo. Os extremos desse convexo, que passamos a apresentar, são o elemento central da Teoria Ergódica. Um conjunto mensurável $A \subset X$ diz-se T*-invariante*, se $T^{-1}(A) = A$.

Definição B.2. Uma transformação mensurável $T : X \to X$ diz-se *ergódica* para uma probabilidade invariante μ, se, para todo o conjunto T*-invariante* A, valer $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Também se diz que a medida μ *é ergódica para* T ou que o sistema $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ é ergódico, com o mesmo significado. A ergodicidade de uma transformação traduz-se na impossibilidade de decompor o sistema em duas partes invariantes com significado essencial do ponto de vista da medida invariante (i.e., medida positiva), desempenhando um papel análogo ao dos sistemas *minimais* em Dinâmica topológica, ou os números primos em Teoria dos Números. Há várias caraterizações equivalentes da ergodicidade, úteis em termos práticos. Nesta linha de ideias, dizemos que uma função mensurável $\phi : X \to \mathbb{R}$ é T*-invariante*, se $\phi \circ T = \phi$, e dizemos que é (T, μ)*-invariante*, se a invariância se dá em μ-q.t.p..

Proposição B.2. *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva a probabilidade μ. Então são equivalentes:*

1. *O sistema (T, μ) é ergódico.*

2. *Toda a função $\phi : X \to \mathbb{R}$ mensurável T-invariante é constante num conjunto de probabilidade total.*

3. *Toda a função* $\phi \in L^1(\mu)$ *satisfaz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x) = \int \phi \, d\mu \ \ \mu\text{-q.t.p..}$$

A validade da proposição acima permanece inalterada se substituirmos a T-invariância pela (T, μ)-invariância. Uma longa lista de critérios alternativos se poderia adicionar (ver [27]).

B.2.1 Resultados clássicos

Referimos os resultados clássicos que marcaram os inícios desta disciplina: o Teorema da *Recorrência de Poincaré* e o Teorema *Ergódico de Birkhoff*. Estes surgiram em diversos pontos do texto, integrando partes de demonstrações, pelo que é conveniente a sua menção.

Teorema B.2. (Recorrência de Poincaré) *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $T : X \to X$ *uma transformação que preserva* μ. *Então, para todo* $A \in \mathcal{A}$, *a órbita de quase todo o ponto de* A *retorna infinitas vezes a* A. *Mais precisamente, se*

$$A^r = \{x \in A \,:\, T^n x \in A \text{ para infinitos valores de } n\},$$

então $\mu(A^r) = \mu(A)$.

Apesar de ser um resultado interessante por si mesmo, nada diz acerca da frequência com que os pontos retornam. Esta informação é melhorada no seguinte resultado.

Teorema B.3. (Birkhoff) *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $T : X \to X$ *uma transformação que preserva* μ. *Se* $\phi \in L^1(\mu)$, *então existe uma função* $\phi^* \in L^1(\mu)$ *tal que*

$$\phi^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^n(x),$$

em μ*-quase todo o ponto. Além disso, a função* ϕ^* *satisfaz*

1. $\phi^* \circ T = \phi^*$, *em* μ*-quase todo o ponto, e*

2. $\int \phi^* \, d\mu = \int \phi \, d\mu$.

Em particular, se T *é ergódica,* ϕ^* *é constante (igual a* $\int \phi \, d\mu$*), em* μ*-quase todo o ponto.*

Notamos que este teorema é válido ainda se ϕ for *semi-integrável*, caso em que algumas quantidades poderão não ser finitas (tal como no Teorema Ergódico Subaditivo).

No caso particular em que $\phi = \chi_E$ é a função caraterística de um conjunto mensurável $E \subset X$, temos um melhoramento do Teorema da Recorrência com informação de natureza mais quantitativa acerca da frequência com que os pontos retornam, digamos, uma *frequência média de visita*

$$\chi_E^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{i = 0, \ldots, n-1 \,:\, T^i x \in E\}.$$

Portanto para sistemas ergódicos esta frequência é tanto maior quanto maior for o *tamanho* de E, de acordo com a fórmula $\chi_E^*(x) = \mu(E)$.

Apêndice C

Cociclos lineares

Neste apêndice, descreveremos algumas das propriedades básicas dos cociclos sobre fibrados. Como base e complemento do que aqui se expõe mencionamos [5] e [38] .

C.1 Fibrados vetoriais

Visando introduzir a noção de cociclo, apresentamos a noção de *fibrado vetorial mensurável*, o análogo dos fibrados vetoriais contínuos ou diferenciáveis na Teoria de Medida. A definição aqui proposta é adaptada de [26], mas também visível em [5].

Definição C.1. Dizemos que E é um *fibrado vetorial mensurável* real sobre X, se

1. E, dito o *espaço total*, e X, dito o *espaço de base*, são ambos espaços mensuráveis;
2. existe $\pi : E \to X$ mensurável, dita a *projeção natural*, e
3. para todo $x \in X$, o conjunto $E_x = \pi^{-1}(x)$, dito a *fibra* sobre x, tem estrutura de espaço vetorial real.

Além do mais, deve ser satisfeita a seguinte

- *condição de trivialidade local*: para todo $x \in X$, existem
    1. um conjunto mensurável $A_x \subset X$ tal que $x \in A_x$,
    2. um inteiro $d \geqslant 0$ e

3. uma aplicação bijetiva bimensurável (i.e., mensurável e com inversa mensurável)

$$h : A_x \times \mathbb{R}^d \to \pi^{-1}(A_x)$$

de tal modo que para cada $a \in A_x$, a correspondência $v \to h_a(v) := h(a, v)$ define um isomorfismo linear entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^d$ e o espaço vetorial $\pi^{-1}(a)$.

Quando $E = X \times \mathbb{R}^d$, dizemos que o fibrado é *trivial*, o que corresponde à possibilidade de escolher $A_x = X$ na definição acima. A próxima proposição, retirada de [5], mostra que, do ponto de vista da medida, todo o fibrado vetorial mensurável sobre um espaço métrico compacto é trivial.

Proposição C.1. *Seja $\pi : E \to X$ um fibrado vetorial mensurável sobre um espaço métrico compacto $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então existe um subconjunto $Y \subset X$ tal que $\mu(Y) = 1$ e $\pi^{-1}(Y)$ é (isomorfo a) um fibrado vetorial trivial.*

C.2 Cociclos lineares

Nesta secção, consideramos um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e uma transformação mensurável $T : X \to X$ que preserva μ. Para incluir toda a informação, assumiremos que a transformação é invertível, deixando ao leitor a tarefa de reter o essencial para as transformações gerais. Mais uma vez, denotamos por $GL(\mathbb{R}, d)$ o conjunto das matrizes invertíveis $d \times d$ com entradas nos números reais.

Definição C.2. Uma função $\mathfrak{A} : X \times \mathbb{Z} \to GL(\mathbb{R}, d)$ diz-se um *cociclo multiplicativo linear* sobre T, ou simplesmente *cociclo*, se as seguintes propriedades se verificarem:

1. $\mathfrak{A}(x, 0) = Id$, para todo $x \in X$,

2. $\mathfrak{A}(x, n + k) = \mathfrak{A}(T^k x, n)\mathfrak{A}(x, k)$, para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, e

3. $\mathfrak{A}(\cdot, n) : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ é mensurável, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Note-se que nestas condições, $\mathfrak{A}(T^{-n}x, n)^{-1} = \mathfrak{A}(x, -n)$, para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo C.1. Dada uma aplicação mensurável $A : X \to GL(\mathbb{R}, d)$, podemos definir um cociclo pela fórmula

$$\mathfrak{A}(x,n) = \begin{cases} A(T^{n-1}x)A(T^{n-2}x)\cdots A(Tx)A(x), & \text{se } n > 0 \\ Id, & \text{se } n = 0 \\ (A(T^n x))^{-1}\cdots(A(Tx))^{-1}, & \text{se } n < 0 \end{cases}.$$

A aplicação A diz-se o *gerador* do cociclo. Observe-se que cada cociclo $\mathfrak{A}$ é gerado pela função $A(\cdot) = \mathfrak{A}(\cdot, 1)$.

Um cociclo linear sobre T gerado por A induz uma *extensão linear* $F : X \times \mathbb{R}^d \to X \times \mathbb{R}^d$ dada sob a forma de produto semi-direto

$$F(x, v) = (Tx, A(x) \cdot v).$$

Por simplicidade, chamamos a tais extensões também de cociclos. Assim definida, F é uma aplicação mensurável, de modo que se $\pi : X \times \mathbb{R}^d \to X$ designa a projeção natural (i.e., $\pi(x, v) = x$), então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{F} & X \times \mathbb{R}^d \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

é comutativo. Uma interpretação útil e interessante, à luz da Teoria de Fibrados, é a seguinte: a ação induzida de F na *fibra* sobre x, $\pi^{-1}(x)$, para a *fibra* sobre $T(x)$, $\pi^{-1}(T(x))$, é dada pela matriz $A(x)$, sendo portanto um isomorfismo linear de espaços vetoriais (ver figura C.1).

Os cociclos/extensões lineares, tal como os definimos acima, são casos particulares de *morfismos de fibrados vetorias*. Um morfismo de fibrados vetoriais $F : E \to E$ sobre uma aplicação mensurável $T : X \to X$ é uma aplicação mensurável tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

é comutativo e as ações $F_x : E_x \to E_{T(x)}$ induzidas nas fibras são isomorfismos lineares. Como vimos na Proposição C.1, morfismos sobre transformações de espaços métricos compactos são essencialmente cociclos/extensões lineares do ponto de vista da medida e, neste trabalho, chamamos indistintamente cociclos aos morfismos mais gerais.

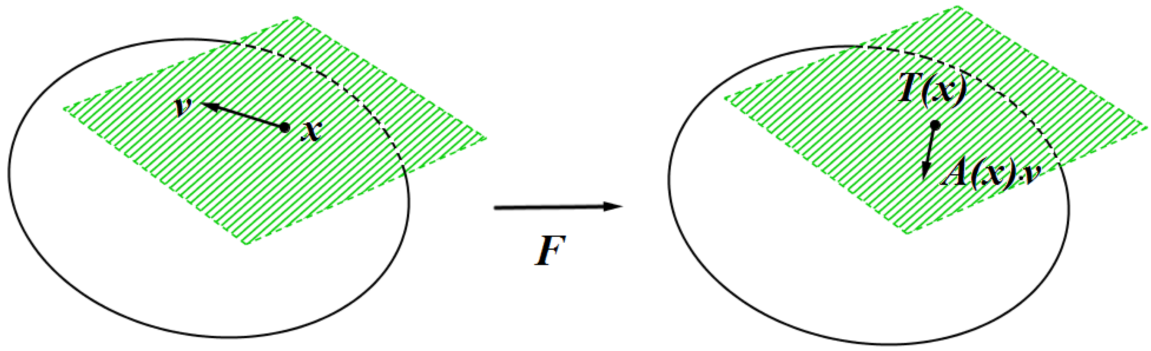

Figura C.1: AÇÃO NAS FIBRAS

Exemplo C.2. Um exemplo que se impõe pela sua importância dentro deste panorama prende-se com a derivada de um difeomorfismo arbitrário f duma variedade M

$$Df : TM \to TM$$

a atuar no *fibrado tangente*, que consiste de todos os pares (x, v) tais que $x \in M$ e $v \in T_xM$. Quando f é um difeomorfismo, a ação induzida nas fibras $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}M$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Para algumas variedades, o fibrado tangente é trivial, como é o caso de qualquer aberto de $\mathbb{R}^d$ ou o do toro d-dimensional T^d. Estas variedades dizem-se por isso *paralelizáveis*. É facto elementar da Teoria de Fibrados que uma variedade diferenciável d-dimensional é paralelizável se, e somente se, existirem d campos de vetores diferenciáveis $V_1(x), \ldots, V_d(x)$ definidos em M, tais que em cada ponto $p \in M$, os vetores $\{V_1(p), \ldots, V_d(p)\}$ são linearmente independentes e formam, por isso, uma base de T_pM (ver [26]). Nestas hipóteses, podemos ver a derivada como uma extensão linear sobre f, em virtude da bem conhecida regra da cadeia

$$Df_x^n = Df_{f^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ Df_{f(x)} \circ Df_x,$$

onde a matriz $A(x) \in GL(d)$ a considerar é a que representa a aplicação $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}M$ com respeito às bases em questão. Noutras variedades, como por exemplo a esfera 2-dimensional $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, já não podemos aplicar esta construção. No caso específico da esfera, isso deve-se ao facto de qualquer campo de vetores tangencial contínuo nela definido se anular em algum ponto. Vale, contudo, a descrição mais geral para morfismos de fibrados vetoriais sobre alguma transformação.

C.3 Cohomologia e equivalência temperada

Vamos introduzir uma noção de equivalência entre cociclos que preserva expoentes de Lyapunov entre cociclos equivalentes. Mais uma vez, supomos que a transformação é invertível, deixando ao leitor a tarefa de reter o essencial para as transformações gerais.

Seja $Y \subset X$ um conjunto mensurável T-invariante não vazio.

Definição C.3. Dizemos que uma aplicação mensurável $L : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ é *temperada em* Y *com respeito a uma trasnformação* T ou simplesmente *temperada*, se

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L(T^n(x))^{\pm 1}\| = 0, \text{ para todo } x \in Y.$$

Uma condição imediata para que uma função L seja temperada em qualquer conjunto mensurável T-invariante não vazio $Y \subset X$ com respeito a qualquer transformação invertível é que as funções $x \in X \mapsto \|L(x)\|, \|L(x)^{-1}\|$ sejam limitadas.

Exemplo C.3. Considere-se uma aplicação mensurável $L : X \to O(\mathbb{R}, d)$, onde $O(\mathbb{R}, d)$ designa o conjunto das matrizes quadradas ortogonais de dimensão d com entradas no corpo dos números reais. Segue do que foi dito que L é uma aplicação temperada pois $\|L^{\pm 1}(x)\| = 1$, para todo $x \in X$.

Temos ainda o seguinte critério, retirado de [5], que é mais uma aplicação do Teorema de Birkhoff.

Proposição C.2. *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva uma probabilidade μ e $L : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ uma transformação mensurável. Se $\log \|L^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$, então L é temperada num conjunto de probabilidade total com respeito a f.*

Em termos simples, cociclos equivalentes são aqueles que se podem obter um do outro por uma mudança de coordenadas temperada. Para formalizar esta noção, sejam $A, B : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ os geradores de dois cociclos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sobre uma transformação invertível T e $Y \subset X$ um conjunto mensurável.

Definição C.4. Os cociclos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ dizem-se *equivalentes em* Y ou *cohomólogos em* Y, se existir uma função mensurável $L : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ que é temperada em Y com respeito a T e tal que

$$A(x) = L(Tx)^{-1} \cdot B(x) \cdot L(x), \text{ para todo } x \in Y.$$

A noção de cohomologia em Y é uma relação de equivalência, que denotamos por $\sim_Y$. A equação que relaciona os geradores de cociclos cohomólogos diz-se a *equação de cohomologia*. Mais geralmente,

$$\mathfrak{A}(x,n) = L(T^n x)^{-1}\mathfrak{B}(x,n)L(x), \text{ para todo } x \in Y \text{ e } n \in \mathbb{Z}.$$

Denotando por $F_{T,A}$ o cociclo (extensão linear) sobre T gerado por A facilmente se vê que se $\mathfrak{A} \sim_Y \mathfrak{B}$ por uma aplicação $L : X \to GL(\mathbb{R}, d)$ temperada em Y com respeito a T, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{F_{T,A}} & Y \times \mathbb{R}^d \\ {\scriptstyle F_{Id,L}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{Id,L}} \\ Y \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{F_{T,B}} & Y \times \mathbb{R}^d \end{array}$$

comuta. O que mais importa desta noção para a presente dissertação é o facto dos expoentes de Lyapunov serem invariantes por equivalência temperada, de acordo com a seguinte

Proposição C.3. *Sejam* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *cociclos tais que* $\mathfrak{A} \sim_Y \mathfrak{B}$ *por uma aplicação temperada* $L : X \to GL(\mathbb{R}, d)$. *Então, para todo* $x \in Y$ *e todo* $v \in \mathbb{R}^d$*, tem-se*

$$\limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| = \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot L(x) \cdot v\|.$$

Além disso, se existir algum dos limites em algum dos lados da igualdade acima, então existe o limite respetivo no outro e, nesse caso, coincidem.

Prova: Sejam $x \in Y \subset X$ e $v \in \mathbb{R}^d$. Temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{(n)}(x) \cdot v\| &= \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L(T^n x)^{-1} \cdot B^{(n)}(x) \cdot L(x) \cdot v\| \\ &\leqslant \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L(T^n x)^{-1}\| + \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot L(x) \cdot v\| \\ &= \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|B^{(n)}(x) \cdot L(x) \cdot v\|. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|B^{(n)}(x)\cdot L(x)\cdot v\| &= \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L(T^n x)\cdot A^{(n)}(x)\cdot v\| \\
&\leqslant \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L(T^n x)\| + \frac{1}{n}\log\|A^{(n)}(x)\cdot v\| \\
&= \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|A^{(n)}(x)\cdot v\|.
\end{aligned}$$

Juntando as duas desigualdades acima, temos

$$\limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|A^{(n)}(x)\cdot v\| = \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|B^{(n)}(x)\cdot L(x)\cdot v\|.$$

A mesma igualdade é válida substituindo o limite superior pelo limite inferior, exatamente pelo mesmo argumento. Isto conclui a demonstração. □

Bibliografia

[1] ALVES, J.: *Análise Funcional*. Março 2002. http://cmup.fc.up.pt/cmup/jfalves/aulas/analise.pdf.

[2] ARNOLD, L.: *Random dynamical systems*. Springer-Verlag, **2003**.

[3] ÁVILA, A.; BOCHI, J.: *On the subaditive ergodic theorem*. Janeiro de 2009. http://www.mat.puc-rio.br/∼jairo/docs/kingbirk.pdf.

[4] BARREIRA, L.; PESIN, Y.: *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. University Lecture Series **23**, Amer. Math. Soc., 2002.

[5] BARREIRA, L.; PESIN, Y.: *Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents*. Cambridge University Press, **2007**.

[6] BIRKHOFF, G.: *Proof of the ergodic theorem*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17** (1931), 656-660.

[7] BOCHI, J.: *The Multiplicative Ergodic Theorem of Oseledets*. Maio de 2008. http://www.mat.puc-rio.br/∼jairo/docs/oseledets.pdf.

[8] BOGACHEV, V.: *Measure theory*. Springer-Verlag, **2007**.

[9] BYLOV, D.; VINOGRAD, R.; GROBMAN, D.; NEMYCKII, V.: *Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability*. Izdat. "Nauka", Moscow, **1966**, em Russo.

[10] CONG, Z.: *Teorema Ergódico Multiplicativo em Espaços Métricos de Curvatura Não-positiva*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Brasil, **2013**.

[11] CRAUEL, H.: *Lyapunov exponents and invariant measures of stochastic systems on manifolds*. Springer Lect. Notes in Math. **1186** (1985), 271-291.

[12] FURSTENBERG, H.; KESTEN, H.: *Products of random matrices*. Ann. Math. Statist. **31** (1960), 457-469.

[13] KAIMANOVICH, V.: *Lyapunov exponents, symmetric spaces and a multiplicative ergodic theorem for semisimple Lie groups*. J. Soviet Math. **47** (1989), 2387-2398.

[14] KAMAE, T.: *A simple proof of the ergodic theorem using non-standard analysis*. Israel Journal of Mathematics **42** (1982), 284-290.

[15] KARLSSON, A.; LEDRAPPIER, F.: *On laws of large numbers for random walks*. Annals of Probability **34** (2006), 1693-1706.

[16] KARLSSON, A.; MARGULIS, G.: *A multiplicative ergodic theorem and nonpositive curved spaces*. Comm. Math. Phys. **22** (1999), 107-123.

[17] KATOK, A.; HASSELBLATT, B.: *A moderna teoria de sistemas dinâmicos*. Fundação Calouste Gulbenkian, **2005**.

[18] KATZNELSON, Y.; WEISS, B.: *A simple proof of some ergodic theorems*. Israel Journal of Mathematics **42** (1982), 291-296.

[19] KINGMAN, J.: *Subadditive ergodic theory*. Annals of Probability, vol. 1, nº 6, 883-909, **1973**.

[20] KINGMAN, J.: *The ergodic theory of subadditive stochastic processes*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **30** (1968), 499–510.

[21] KRENGEL, U.: *Ergodic theorems*. Walter de Gruyter, Berlim, **1985**.

[22] LEDRAPPIER, F.: *Quelques proprietes des exposants caracteristiques*. Springer Lect. Notes in Math. **1097** (1984), 306-396.

[23] LYAPUNOV, A.: *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor & Francis, **1992**.

[24] MAÑÉ, R.: *Ergodic theory and differentiable dynamics*. Springer-Verlag, **1987**.

[25] MAÑÉ, R.: *Lyapunov exponents and stable manifolds for compact transformations*. Geometric dynamics, Springer Lecture Notes in Math. **1007** (1983), 522-577.

[26] MILNOR, J.; STASHEFF, J.: *Characteristic classes*. Princeton University Press and University of Tokyo Press, **1974**.

[27] OLIVEIRA, K.; VIANA, M.: *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Junho de 2013. http://w3.impa.br/∼viana/out/fte.pdf.

[28] OSELEDETS, V.: *A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968), 197-231.

[29] PERRON, O.: *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssyteme*. Math. Zs. **31** (1930), 748–766.

[30] PESIN, Y.: *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. Russian Math. Surveys **32** (1977), 55–114.

[31] RAGHUNATHAN, M.: *A proof of Oseledet's multiplicative ergodic theorem*. Israel J. Math. **32** (1979), 356-362.

[32] RUELLE, D.: *An inequality for the entropy of differentiable maps*. Bull. Braz. Math. Soc. **9** (1978), 83-87.

[33] RUELLE, D.: *Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert Spaces*. Annals of Math. **115** (1982), 243-290.

[34] RUELLE, D.: *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*. Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **50** (1979), 27-58.

[35] SCHÜRGER, K.: *Almost subadditive extensions of Kingman's theorem*. Ann. Probab. **19** (1991), 1575-1586.

[36] STEELE, J.: *Kingman's subadditive ergodic theorem*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **25** (1989), 93-98.

[37] VIANA, M.: *A proof of Oseledets theorem*. http://www.impa.br/∼viana/out/oseledets.pdf.

[38] VIANA, M.: *Lectures on Lyapunov exponents*. Novembro de 2010. http://w3.impa.br/∼viana/out/lle.pdf.

[39] VIANA, M.: *Theorem of Oseledets*. http://w3.impa.br/∼viana/out/ltosel.pdf.

[40] VON NEUMANN, J.: *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **18** (1932), 70-82.

[41] WALTERS, P.: *A dynamical proof of the multiplicative ergodic theorem*. Trans. Amer. Soc. **355** (1993), 245-257.

[42] WALTERS, P.: *An introduction to ergodic theory*. Springer-Verlag, **2000**.